

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A

Une entreprise produit chaque année entre 100 et 900 pneus pour tracteurs. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 9]$ par

$$f(x) = 0,5x^2 - 7x + 14 + 6 \ln(x).$$

On admet que la fonction f modélise le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu, exprimé en centaines d'euros, pour x centaines de pneus produits.

1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1; 9]$ et on note f' sa fonction dérivée.

Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1; 9]$ on a : $f'(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0,5 \times 2x - 7 + 0 + 6 \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{(x - 7) \times 2 + 6}{x} \\ f'(x) &= \frac{x^2 - 7x + 6}{x} \end{aligned}$$

2. (a) Justifier les variations suivantes de la fonction f sur l'intervalle $[1; 9]$:

x	1	6	9
Variations de $f(x)$			

x	1	α	6	9
$x^2 - 7x + 6$	+	-	0	+
x		+		+
$f'(x)$	+	-	+	+
Variation de f	$f(1) = 7,5$	$f(\alpha) = 5$	$f(6) = 0,75$	$f(9) = 4,6$

* Signe de $x^2 - 7x + 6$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-7)^2 - 4 \times 1 \times 6 \\ &= 49 - 24 \\ &= 25 > 0 \text{ donc il y a 2 racines} \\ x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 + \sqrt{25}}{2} = 6 \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 - \sqrt{25}}{2} = 1 \end{aligned}$$

* Dénominateur $x = 0$ est une VI

(b) Justifier que, sur l'intervalle $[1; 9]$, l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α .

Entre 6 et 9, $f(x) < f(9) = 4,6 < 5$ donc l'équation $f(x) = 5$ n'a pas de solution.

Entre 1 et 6:

- $f(x)$ est continue
- $f(x)$ est strictement décroissante
- $f(1) = 7,5 > 5 > f(6) = 0,75$

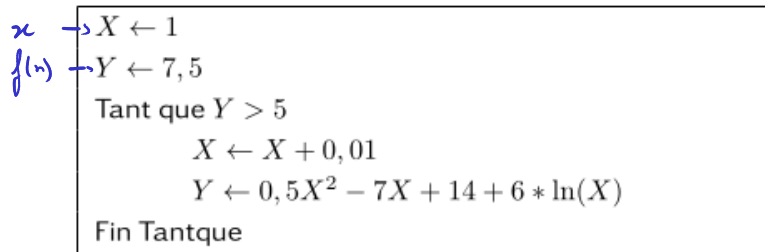
Donc d'après le TVI, l'équation $f(x) = 5$ a une unique solution entre 1 et 6

Donc l'équation $f(x) = 5$ a une unique solution entre 1 et 9

(c) Donner un encadrement au centième près de α .

Encadrement de alpha au centième: $1,68 < \alpha < 1,69$

(d) On considère l'algorithme ci-dessous :



À la fin de l'exécution de l'algorithme, quelle valeur numérique contient la variable X ?

1,68

3. Pour quelle quantité de pneus, le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu est-il minimal ? À combien s'élève-t-il ?

Le coût moyen annuel minimal est atteint pour $x = 6$ donc 600 pneu et vaut $f(x) = 0,75$ soit 75€.

Partie B

Cette même entreprise envisage la fabrication de semoirs (gros matériel agricole). On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 100]$ par

$$g(x) = 2x - 1 + e^{0,05x}$$

modélise le coût de fabrication, exprimé en centaines d'euros, de x semoirs.

1. Donner une primitive G de la fonction g sur l'intervalle $[0; 100]$.

$$G(x) = 2 \times \frac{1}{2} x^2 - 1x + 20e^{0,05x}$$

$$G(x) = x^2 - x + 20e^{0,05x}$$

$v = e^u \rightarrow e^u$ $u = 0,05x$
 $v' = 0,05e^u$
 $\frac{20 \times 0,05}{1} e^{0,05x} \rightarrow 20e^{0,05x}$

2. Calculer la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[0; 100]$.

$$\frac{1}{100-0} \int_0^{100} g(x) dx = \frac{1}{100} (G(100) - G(0))$$

$$= \frac{1}{100} (100^2 - 100 + 20e^{0,05 \times 100} - (0^2 - 0 + 20e^{0,05 \times 0}))$$

$$= \frac{1}{100} \times 12848 = 128,48$$

3. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

En moyenne, les coûts de fabrications s'élèveront à 12 848€.