Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A

Une entreprise produit chaque année entre 100 et 900 pneus pour tracteurs.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;9]$ par

$$f(x) = 0,5x^2 - 7x + 14 + 6\ln(x).$$

On admet que la fonction f modélise le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu, exprimé en centaines d'euros, pour x centaines de pneus produits.

1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\,;9]$ et on note f' sa fonction dérivée.

   Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;9]$ on a : $f'(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x}$.

$$f'(x) = 0,5 \times 2x - 7 + 0 + 6 \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{(x - 7)\times x}{x} + \frac{6}{x}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x}$$

2. (a) Justifier les variations suivantes de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;9]$:

x	1	6	9
Variations de $f(x)$	↘		↗

x	1	α	6		9
x^2-7x+6	0	−	0	+	
x		+		+	
$f'(x)$	0	−	0	+	
Variation de f	$f(1)=7,5$	5	$f(6)=0,75$		$f(9)\approx 4,6$

* Signe de $x^2 - 7x + 6$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= (-7)^2 - 4 \times 1 \times 6$
$= 49 - 24$
$= 25 > 0$ donc il y a 2 racines

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7+\sqrt{25}}{2} = 6$

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7-\sqrt{25}}{2} = 1$

* Denominateur $x = 0$ est une VI

(b) Justifier que, sur l'intervalle $[1\,;9]$, l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α.

Entre 6 et 9, f(x) < f(9)=4,6 < 5 donc l'équation f(x) = 5 n'a pas de solution.
Entre 1 et 6:
- f(x) est continue
- f(x) est strictement décroissante
- f(1) = 7,5 > 5 > f(6) = 0,75

Donc d'après le TVI, l'équation f(x) = 5 a une unique solution entre 1 et 6

Donc l'équation f(x) = 5 a une unique solution entre 1 et 9

(c) Donner un encadrement au centième près de α.

Encadrement de alpha au centième: 1,68 < alpha < 1,69

(d) On considère l'algorithme ci-dessous :

$x \rightarrow X \leftarrow 1$
$f(x) \rightarrow Y \leftarrow 7,5$
Tant que $Y > 5$
$\quad X \leftarrow X + 0,01$
$\quad Y \leftarrow 0,5X^2 - 7X + 14 + 6 * \ln(X)$
Fin Tantque

À la fin de l'exécution de l'algorithme, quelle valeur numérique contient la variable X ?

1,68

À la fin de l'exécution de l'algorithme, quelle valeur numérique contient la variable X ?

3. Pour quelle quantité de pneus, le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu est-il minimal ? À combien s'élève-t-il ?

Le coût moyen annuel minimal est atteint pour x = 6 donc 600 pneu et vaut f(x) = 0,75 soit 75€.

Partie B

Cette même entreprise envisage la fabrication de semoirs (gros matériel agricole). On admet que la fonction g définie sur l'intervalle [0; 100] par

$$g(x) = 2x - 1 + e^{0,05x}$$

modélise le coût de fabrication, exprimé en centaines d'euros, de x semoirs.

$v'e^v \longrightarrow e^v \qquad v = 0,05x \qquad v' = 0,05$

1. Donner une primitive G de la fonction g sur l'intervalle [0; 100].

$\underbrace{20 \times 0,05}_{1} e^{0,05x} \longrightarrow 20e^{0,05x}$

$$G(x) = 2 \times \frac{1}{2}x^2 - 1x + 20e^{0,05x}$$

$$G(x) = x^2 - x + 20e^{0,05x}$$

2. Calculer la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle [0; 100].

$$\frac{1}{100-0}\int_0^{100} g(x)\,dx = \frac{1}{100}\left(G(100) - G(0)\right)$$

$$= \frac{1}{100}\left(100^2 - 100 + 20e^{0,05\times 100} - \left(0^2 - 0 + 20e^{0,05\times 0}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{100} \times 12\,848 = 128,48$$

3. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

En moyenne, les coûts de fabrications s'élèveront à 12 848€.