Dans les exercices suivants, vous aurez un moment besoin de calculer l'équation d'une tangente. Je vous rappelle que l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a se calcule avec la formule suivante

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exercice 1 — Vitesse de rotation

On considère la fonction w définie pour tout réel positif t par :

$$w(t) = 4\mathrm{e}^{-200t} + 146.$$

On note C la courbe représentative de la fonction w dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculer $w(0)$.
   (b) Déterminer la limite de la fonction w lorsque t tend vers $+\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.
2. On note w' la fonction dérivée de la fonction w sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   (a) Pour tout réel positif t, calculer $w'(t)$.
   (b) Étudier le signe de w' sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   (c) Dresser le tableau de variation de la fonction w sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   (d) Déterminer une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0 .

Partie B

On étudie l'évolution de la vitesse d'un moteur dont la vitesse de rotation à vide est de 150 rad.s^{-1}.
On s'intéresse à une phase particulière appelée phase d'embrayage.
Durant cette phase, la vitesse de rotation du moteur, exprimée en rad.s^{-1}, est modélisée par une fonction solution de l'équation différentielle (E) :

$$\frac{1}{200}y' + y = 146$$

où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle t positive et exprimée en seconde.

1. (a) Résoudre cette équation différentielle.
   (b) Vérifier que la fonction w étudiée dans la **partie A** est la fonction solution de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $w(0) = 150$.
2. Interpréter, dans le contexte de l'exercice, la limite de $w(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ ainsi que le sens de variation de la fonction w, déterminés dans la **partie A**.
3. On considère que la vitesse de rotation du moteur, exprimée en rad.s^{-1}, est stabilisée lorsque la quantité $\dfrac{w(t)-146}{146}$ est inférieure à $0,01$.
   Calculer le temps mis par le moteur pour stabiliser sa vitesse. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième de seconde.

Exercice 2 — Carbon 14

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Les organismes vivants contiennent naturellement du carbone 14 (élément radioactif) provenant des rayons cosmiques, qui est constamment renouvelé et qui se maintient à la valeur de 15,3 unités.
À leur mort, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre.

On note $f(t)$ la concentration en carbone 14 présent dans un organisme à l'instant t après sa mort (t exprimé en milliers d'années).

Partie A :

On admet que f est une solution sur $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle :

$$y' = -0,124y \qquad (E).$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 15,3$.

Partie B :

On admet que la fonction f est définie par $f(t) = 15,3\mathrm{e}^{-0,124t}$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

1. Déterminer les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.
2. Déterminer la limite de f au voisinage de l'infini.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Partie C :

On rappelle que la fonction f donnée dans la partie B donne la concentration en carbone 14 dans un organisme après sa mort en fonction de t (en milliers d'années).

1. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os présentant une concentration en carbone 14 égale à $7,27$ unités.
   Justifier que l'on peut estimer l'âge de ces fragments d'os à 6 000 ans.
2. Lorsque la concentration en carbone 14 d'un organisme devient inférieure à $0,3\,\%$ de sa valeur initiale on ne peut pas dater raisonnablement à l'aide du carbone 14.
   Déterminer l'âge à partir duquel un organisme ne peut plus être daté au carbone 14.

Exercice 3 — Octane

L'octane est un hydrocarbure qui entre dans la composition de l'essence.

Lorsqu'on chauffe un mélange d'octane et de solvant dans une cuve, une réaction chimique transforme progressivement l'octane en un carburant plus performant, appelé iso-octane.

La concentration d'octane, en moles par litre, dans la cuve est modélisée par une fonction f du temps t, exprimé en minutes. On admet que cette fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, est une solution, sur cet intervalle, de l'équation différentielle suivante :

$$(E)\ :\ y' + 0,12y = 0,003.$$

À l'instant $t = 0$, la concentration d'octane dans la cuve est de $0,5$ mole par litre (mol.L^{-1}).

1. (a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E).
   (b) Donner $f(0)$.
   (c) Vérifier que la fonction f est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 0,475\,\mathrm{e}^{-0,12t} + 0,025$.
2. (a) Calculer la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
   (c) Interpréter cette réponse dans le contexte de l'exercice.
3. Calculer, en justifiant votre réponse, à la minute près, le temps nécessaire pour obtenirune concentration en octane dans la cuve de $0,25$ mole par litre.
4. (a) Calculer, en justifiant votre réponse, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.
   Interpréter le résultat dans le contexte.
   (b) Le processus de transformation de l'octane en iso-octane est arrêté au bout d'une heure. Expliquer ce choix.