Polynomes de degré 3 - Plan de travail

1ST – mai 2023

Savoir-faire de la séquence

- représentations graphiques des fonctions : $ax3$, $ax3 + b$;
- racines et signe d'un polynôme de degré 3 de la forme $a(x - x1)(x - x2)(x - x3)$;
- équation $x^3 = c$; racine cubique d'un nombre réel positif ; notations racines cubiques

1 Forme et forme graphique

- ☐ Exercice 1 : Identification . . . . ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 2 : Représentation graphique . . . . ☆☆☆☆☆

2 Racine et signes

- ☐ Exercice 3 : Factorisation et racines . . . . ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 4 : Étude de signe . . . . ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 5 : Étude des profits . . . . ☆☆☆☆☆

3 Problèmes

- ☐ Exercice 6 : Lot . . . . ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 7 : Population de bactéries . . . . ☆☆☆☆☆

4 Racine cubique

- ☐ Exercice 8 : Solution des équations $x^3 = k$ . . . . ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 9 : Équations cubiques . . . . ☆☆☆☆☆

Exercice 1 — Identification

Identifier le degré des polynômes ci-dessous ainsi que les coefficients (quand ils ne sont pas factorisés).

a) $f(x) = 7x^2 + 2x + 0.2$
b) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 8x + 2$
c) $f(x) = 3x^2 - 10x^3 - 2$
d) $f(x) = 4x^2 - 5x$
e) $f(x) = x^3$
f) $f(x) = 3 - 5x^3$
g) $f(x) = -10x + 2$
h) $f(x) = -10x^2 + 0.25$
i) $f(x) = -5x^2 + x$
j) $f(x) = (5x-2)(3x-1)$
k) $f(x) = (2x+1)(0.1x-10)^2$
l) $f(x) = 3(x+2)(x-1)(x-2)$

Exercice 2 — Représentation graphique

On souhaite étudier les représentations graphiques des fonctions suivantes :

$a(x) = 2x^3$	$e(x) = -2(x+3)(x-1)(x+2)$	$i(x) = -0.5x^3$
$b(x) = 5x^3 + 1$	$f(x) = 5x^3 - 3$	$j(x) = 0.5x^3$
$c(x) = 2(x-1)(x-4)(x+2)$	$g(x) = 2x^3 + 3$	$k(x) = 2x^3 - 1$
$d(x) = -2x^3$	$h(x) = 2(x-2)(x-4)(x+1)$	$l(x) = -2(x+1)(x-4)x$

1. Regroupe les fonctions sur des critères de forme de la formule.
2. Pour chaque fonction, en vous aidant de la calculatrice, tracer l'allure du graphique. On ne demande pas un tracé précis, mais une forme générale qui respecte la position par rapport aux axes.
3. Faire une conjecture sur le lien entre la forme de la fonction et la forme du graphique associé.

Exercice 3 — Factorisation et racines

1. Soit $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$
   (a) Quel est le degré de ce polynôme ?
   (b) Par les nombres suivants, lesquels sont des racines de $f(x)$?

   $$-3 \qquad -2 \qquad -1 \qquad 0 \qquad 1 \qquad 2 \qquad 3$$

   (c) Conjecturer une forme factorisée de $f(x)$ (on ne vous demande pas de la prouver).
   (d) Tracer l'allure de la fonction $f(x)$.
2. Mêmes questions pour la fonction $g(x) = 2x^3 - 4x^2 - 18x + 36$
3. Mêmes questions pour la fonction $h(x) = 2x^3 - 8x^2 + 8x$
4. Combien de racines semblent avoir les polynômes de degré 3 ?

Exercice 4 — Étude de signe

Pour chacune des fonctions suivantes, réaliser le tableau de signe.

1. $f(x) = 3(x-1)(x-10)(x+2)$
2. $g(x) = 2(x-2)(x+3)(x+2)$
3. $h(x) = -3(x-1)(x-10)(x+2)$
4. $i(x) = -2(x-1)(x+1)(x+2)$
5. $j(x) = -3(x-1)(x-10)^2$
6. (*) $k(x) = (2x-1)(-x-10)(x+2)$

Exercice 5 — Étude des profits

Une usine produit chaque jour entre 0 et 50 milles masques. Une étude statistique a montré que les bénéfices pouvaient être modélisés par la fonction suivante :

$$f(x) = x^3 - 96x^2 + 2489,25x - 10\,171,25$$

1. Expliquer que l'on peut mettre $f(x)$ sous la forme $f(x) = (x-5)(x-39,5)(x-51,5)$ en calculant les racines.
2. Étudier le signe de $f(x)$.
3. En déduire le nombre de masques que l'entreprise doit produire pour gagner de l'argent.

Exercice 6 — Lot

Un artisan produit et vend des sachets de viennoiseries. En notant, x le nombre de sachets de viennoiseries ses coûts sont calculables avec la formule suivante :

$$C(x) = x^3 - 120x^2 + 10x$$

1. Calculer le coût de production pour 75 sachets.
2. Chaque sachet est vendu 10€.
   (a) Justifier que le bénéfice se calcule alors avec la formule suivante :
   $$B(x) = x^3 - 120x^2$$
   (b) Tracer l'allure de la courbe représentative de $B(x)$, conjecturer puis démontrer les racines du polynômes.
   (c) Démontrer que $B(x)$ peut s'écrire
   $$B(x) = x^2(x-120)$$
   (d) Étudier le signe de $B(x)$.
   (e) En déduire la production maximal avant que l'artisan commence à perdre de l'argent.
3. Recherche du maximum des bénéfices.
   (a) Déterminer $B'(x)$ la dérivée de $B(x)$.
   (b) Montrer que l'on peut écrire
   $$B'(x) = 3x(x-80)$$
   (c) Étudier le signe de $B'(x)$ et en déduire les variations de $B(x)$.
   (d) En déduire le nombre de sachet que l'artisan doit produire pour maximiser ses bénéfices.

Exercice 7 — Population de bactéries

Cet exercice est un problème ouvert. C'est-à-dire qu'il y a de nombreuses façons d'y apporter une réponse qui pourra être plus ou moins précise. C'est à vous de choisir les outils qui vous semblent les plus pertinents puis de détailler votre démarche - qui est aussi importante que le résultat final.

La population de bactéries dans une solution est modélisée par la fonction suivante

$$f(x) = -0,01t^3 + 4t^2 + 2t$$

où t représente le temps en heure depuis le début de l'expérience.

Déterminer quand la population de bactéries va s'éteindre et quand elle aura atteint son maximum.

Exercice 8 — Solution des équations $x^3 = k$

Dans cet exercice, nous allons chercher à résoudre les équations du type $x^3 = k$. Pour cela, nous allons porter une attention particulière à la fonction $f(x) = x^3$.

1. Tracer la courbe représentative de $f(x) = x^3$ avec x allant de -3 à 3 en cherchant à être le plus précis possible.

Les questions suivantes se répondent en utilisant le graphique.

2. Résoudre graphiquement l'équation $x^3 = 8$.
3. Même question pour $x^3 = -8$.
4. Même question pour $x^3 = 4$.
5. Même question pour $x^3 = -2$.
6. Même question pour $x^3 = 0$.
7. De manière générale, combien l'équation $x^3 = k$ a-t-elle de solutions ?

Exercice 9 — Équations cubiques

Résoudre les équations suivantes (les questions avec (*) sont plus compliquées - mais pas impossibles !)

1. $x^3 = 8$
2. $x^3 = 27$
3. $x^3 = 64$
4. $x^3 = -27$
5. $x^3 = 10$
6. $x^3 = -5$
7. (*) $2x^3 = 16$
8. (*) $-4x^3 = 40$
9. (*) $3x^3 + 1 = 8$