Suite géométrique - Solutions

1G EnsSci – janvier 2026

Attention – Document généré par IA

Ce document a été essentiellement généré par une intelligence artificielle (LLM) et relu dans les grandes lignes. Des erreurs, des approximations ou des méthodes inhabituelles peuvent être présentes.

Restez critique face au contenu proposé et ne le considérez pas comme une vérité absolue.

Exercice 1 — Solution — Alerte générale

Méthode 1 : Le communicateur télépathe

Chaque jour, 1 000 000 nouvelles personnes sont alertées.
Notons u_n le nombre de personnes au courant après n jours.

- $u_0 = 2$ (Faïza et Bob)
- $u_1 = 2 + 1\,000\,000 = 1\,000\,002$
- $u_2 = 1\,000\,002 + 1\,000\,000 = 2\,000\,002$
- Pour tout n, $u_{n+1} = u_n + 1\,000\,000$

C'est une **suite arithmétique** de raison $r = 1\,000\,000$ et de premier terme $u_0 = 2$.
Son terme général est : $u_n = 2 + n \times 1\,000\,000$
Pour alerter 7 milliards de personnes : $u_n \geq 7\,000\,000\,000$

$$\begin{aligned} 2 + n \times 1\,000\,000 &\geq 7\,000\,000\,000 \\ n \times 1\,000\,000 &\geq 6\,999\,999\,998 \\ n &\geq 6\,999{,}99998 \end{aligned}$$

Il faudrait donc environ **7 000 jours** (soit environ **19 ans**) !

Méthode 2 : Chacun alerte 2 nouvelles personnes

Notons v_n le nombre de personnes au courant après n jours.

- $v_0 = 2$ (Faïza et Bob)
- $v_1 = 2 + 2 \times 2 = 6$ (chacun des 2 alerte 2 personnes)
- $v_2 = 6 + 6 \times 2 = 18$ (chacune des 6 alerte 2 personnes)
- Pour tout n, $v_{n+1} = v_n + 2v_n = 3v_n$

C'est une **suite géométrique** de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = 2$.
Son terme général est : $v_n = 2 \times 3^n$
Pour alerter 7 milliards de personnes : $v_n \geq 7\,000\,000\,000$

$$\begin{aligned} 2 \times 3^n &\geq 7\,000\,000\,000 \\ 3^n &\geq 3\,500\,000\,000 \end{aligned}$$

Par tâtonnement ou avec une calculatrice :

- $v_{20} = 2 \times 3^{20} = 6\,973\,568\,802 < 7\,000\,000\,000$
- $v_{21} = 2 \times 3^{21} = 20\,920\,706\,406 > 7\,000\,000\,000$

Il faudrait donc seulement **21 jours** !

Conclusion : Même si le communicateur télépathe semble impressionnant avec son million de personnes alertées par jour, la méthode du bouche-à-oreille (méthode 2) est bien plus efficace : 21 jours contre 19 ans ! C'est la puissance de l'évolution géométrique.

Exercice 2 — Solution — Consommation d'energie

1 Chaque année, la consommation est multipliée par 1,6.

- En 2019 : $200 \times 1{,}6 = 320$ TWh
- En 2020 : $320 \times 1{,}6 = 512$ TWh
- En 2025 : $200 \times 1{,}6^7 \approx 20\,972$ TWh (car 2025 correspond à 7 ans après 2018)

2 a. $u(0) = 200$ TWh (consommation en 2018)

b. La consommation est multipliée par 1,6 chaque année, donc $u(n)$ est une **suite géométrique** de raison $q = 1{,}6$.

c. Le terme général d'une suite géométrique est $u(n) = u(0) \times q^n$.
Donc : $u(n) = 200 \times 1{,}6^n$

3 a. $1{,}82 \times 10^{-6} = 0{,}00000182$ TWh/an

b. Consommation de Paris en 2021 :

$$2\,175\,061 \times 0{,}00000182 \approx 3{,}96 \text{ TWh}$$

Consommation des data centers en 2021 : $u(3) = 200 \times 1{,}6^3 = 819{,}2$ TWh
Donc la population parisienne a consommé **beaucoup moins** d'énergie que les data centers dans le monde (environ 200 fois moins).

Exercice 3 — Solution — Calculs de termes

1 Suite géométrique de raison $q = 1{,}2$ et $u(0) = 1\,000$
Formule : $u(n) = 1\,000 \times 1{,}2^n$

- $u(1) = 1\,000 \times 1{,}2 = 1\,200$
- $u(2) = 1\,000 \times 1{,}2^2 = 1\,440$
- $u(3) = 1\,000 \times 1{,}2^3 = 1\,728$
- $u(10) = 1\,000 \times 1{,}2^{10} \approx 6\,192$

La suite est croissante car $q > 1$.

2 Suite géométrique de raison $q = 0{,}75$ et $u(0) = 1\,000$
Formule : $u(n) = 1\,000 \times 0{,}75^n$

- $u(1) = 1\,000 \times 0{,}75 = 750$
- $u(2) = 1\,000 \times 0{,}75^2 = 562{,}5$
- $u(3) = 1\,000 \times 0{,}75^3 \approx 422$
- $u(10) = 1\,000 \times 0{,}75^{10} \approx 56$

La suite est décroissante car $0 < q < 1$.

3 $u(n+1) = u(n) \times 1{,}1$ et $u(0) = 1\,000$
C'est une suite géométrique de raison $q = 1{,}1$ et $u(0) = 1\,000$.
Formule : $u(n) = 1\,000 \times 1{,}1^n$

- $u(1) = 1\,000 \times 1{,}1 = 1\,100$
- $u(2) = 1\,000 \times 1{,}1^2 = 1\,210$
- $u(3) = 1\,000 \times 1{,}1^3 = 1\,331$
- $u(10) = 1\,000 \times 1{,}1^{10} \approx 2\,594$

La suite est croissante car $q > 1$.

4 $u(n) = 1\,000 \times 0{,}9^n$
C'est une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$ et $u(0) = 1\,000$.

- $u(1) = 1\,000 \times 0{,}9 = 900$
- $u(2) = 1\,000 \times 0{,}9^2 = 810$
- $u(3) = 1\,000 \times 0{,}9^3 = 729$
- $u(10) = 1\,000 \times 0{,}9^{10} \approx 349$

La suite est décroissante car $0 < q < 1$.

Représentation graphique : Les suites 1 et 3 sont croissantes (courbes exponentielles croissantes), tandis que les suites 2 et 4 sont décroissantes (courbes exponentielles décroissantes).

Exercice 4 — Solution — Calculs de résultats d'évolutions

1 Augmentation de 10% : coefficient multiplicateur $= 1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$
Somme après 1 an : $5\,000 \times 1{,}1 = 5\,500$ €

2 Augmentation de 20% : coefficient multiplicateur $= 1 + \frac{20}{100} = 1{,}2$
Nombre de bactéries après 1 heure : $200 \times 1{,}2 = 240$ bactéries

3 Diminution de 25% : coefficient multiplicateur $= 1 - \frac{25}{100} = 0{,}75$
Valeur après 1 an : $20\,000 \times 0{,}75 = 15\,000$ €

4 Diminution de 10% : coefficient multiplicateur $= 1 - \frac{10}{100} = 0{,}9$
Superficie après 1 an : $1\,500 \times 0{,}9 = 1\,350$ hectares

5 Remise de 15% : coefficient multiplicateur $= 1 - \frac{15}{100} = 0{,}85$
Prix après remise : $600 \times 0{,}85 = 510$ €

Exercice 5 — Solution — Calculs de taux d'évolutions

Le taux d'évolution se calcule avec la formule : $t = \frac{\text{Valeur finale}-\text{Valeur initiale}}{\text{Valeur initiale}}$

1 $t = \frac{55\,000-50\,000}{50\,000} = \frac{5\,000}{50\,000} = 0{,}1 = 10\%$
La population a augmenté de **10%**.

2 $t = \frac{700-800}{800} = \frac{-100}{800} = -0{,}125 = -12{,}5\%$
Le prix a diminué de **12,5%**.

3 $t = \frac{2500-1000}{1000} = \frac{1500}{1000} = 1{,}5 = 150\%$
Le nombre de followers a augmenté de **150%**.

4 $t = \frac{15\,000-20\,000}{20\,000} = \frac{-5\,000}{20\,000} = -0{,}25 = -25\%$
La production a diminué de **25%**.

Exercice 6 — Solution — Gestion de la dette

1 Chaque année, la dette augmente de 8%, donc elle est multipliée par $1{,}08$.

- Au bout d'un an : $20\,000 \times 1{,}08 = 21\,600$ €
- Au bout de deux ans : $21\,600 \times 1{,}08 = 23\,328$ €

2
a. $u(0) = 20\,000$ € (dette initiale au moment de l'emprunt)
$u(1) = 21\,600$ € (dette après 1 an)

b. Chaque année, la dette est multipliée par $1{,}08$, donc $u(n)$ est une **suite géométrique** de raison $q = 1{,}08$ et de premier terme $u(0) = 20\,000$.

c. Le terme général d'une suite géométrique est : $u(n) = u(0) \times q^n$
Donc : $u(n) = 20\,000 \times 1{,}08^n$

d. D'après le tableau, $1{,}08^5 = 1{,}4693$
Donc : $u(5) = 20\,000 \times 1{,}4693 = 29\,386$ €

3 On cherche n tel que $u(n) > 35\,000$, c'est-à-dire $20\,000 \times 1{,}08^n > 35\,000$
Soit : $1{,}08^n > \frac{35\,000}{20\,000} = 1{,}75$
D'après le tableau :

- $1{,}08^7 = 1{,}7138 < 1{,}75$
- $1{,}08^8 = 1{,}8509 > 1{,}75$

Donc la dette dépassera 35 000 € au bout de **8 ans**.

Exercice 7 — Solution — Placement bancaire

1 Le livret a été ouvert le 1er janvier 2016. D'après le tableau, le taux de rémunération du livret A était de **0,75%** (taux en vigueur du 1er août 2015 au 31 janvier 2020).

2 Au 1er janvier 2017, soit 1 an après l'ouverture, la somme a augmenté de 0,75%.
Coefficient multiplicateur : $1 + \frac{0{,}75}{100} = 1{,}0075$
Somme au 1er janvier 2017 : $100 \times 1{,}0075 = 100{,}75$ €

3
a. $u(0) = 100$ € (somme initiale au 1er janvier 2016)
$u(1) = 100{,}75$ € (somme au 1er janvier 2017)

b. Chaque année, la somme est multipliée par $1{,}0075$, donc $u(n)$ est une **suite géométrique** de raison $q = 1{,}0075$ et de premier terme $u(0) = 100$.

c. Le terme général est : $u(n) = 100 \times 1{,}0075^n$
Donc : $u(4) = 100 \times 1{,}0075^4 \approx 103{,}03$ €

d. On ne peut pas utiliser cette suite pour calculer $u(5)$ car le taux de rémunération change le 1er février 2020. À partir de cette date, le taux passe à 0,50%, donc la raison de la suite géométrique n'est plus la même. Il faudrait définir une nouvelle suite avec une raison différente ($q = 1{,}005$) pour les années suivantes.