

Nombre dérivé - Solutions

1G EnsSci – février 2026



Attention – Document généré par IA

Ce document a été essentiellement généré par une intelligence artificielle (LLM) et relu dans les grandes lignes. Des erreurs, des approximations ou des méthodes inhabituelles peuvent être présentes.

Restez critique face au contenu proposé et ne le considérez pas comme une vérité absolue.

Exercice 1

Solution

Vitesse moyenne d'une balle

1 La hauteur de la balle après 5 s est $h(5) = -0,1 \times 5^2 + 2 \times 5 = -2,5 + 10 = 7,5$ m.

2 La vitesse moyenne verticale entre $t = 0$ et $t = 4$ est :

$$\frac{h(4) - h(0)}{4 - 0} = \frac{(-0,1 \times 16 + 8) - 0}{4} = \frac{6,4}{4} = 1,6 \text{ m/s}$$

3 La vitesse moyenne verticale entre $t = 2$ et $t = 10$ est :

$$\frac{h(10) - h(2)}{10 - 2} = \frac{(-0,1 \times 100 + 20) - (-0,1 \times 4 + 4)}{8} = \frac{10 - 3,6}{8} = \frac{6,4}{8} = 0,8 \text{ m/s}$$

4 La vitesse moyenne verticale entre $t = 10$ et $t = 16$ est :

$$\frac{h(16) - h(10)}{16 - 10} = \frac{(-0,1 \times 256 + 32) - 10}{6} = \frac{6,4 - 10}{6} = \frac{-3,6}{6} = -0,6 \text{ m/s}$$

5 Graphiquement, le signe de la vitesse moyenne correspond au signe du coefficient directeur de la droite qui relie les deux points considérés :

- Si la droite monte (de gauche à droite), la vitesse moyenne est positive.
- Si la droite descend (de gauche à droite), la vitesse moyenne est négative.
- Si la droite est horizontale, la vitesse moyenne est nulle.

Exercice 2

Solution

Résultats d'une entreprise

1 Graphique : placer les points (1980, 10), (1995, 18), (2000, 29), (2008, 45) et (2020, 50) dans un repère.

2 Graphiquement, on observe que la progression semble la plus rapide entre 1995 et 2000 (la pente de la droite reliant ces deux points est la plus importante).

3 Calcul des vitesses de progression (taux de variation) :

- 1980-1995 : $\frac{18-10}{1995-1980} = \frac{8}{15} \approx 0,53$ milliers d'euros/an
- 1995-2000 : $\frac{29-18}{2000-1995} = \frac{11}{5} = 2,2$ milliers d'euros/an
- 2000-2008 : $\frac{45-29}{2008-2000} = \frac{16}{8} = 2$ milliers d'euros/an
- 2008-2020 : $\frac{50-45}{2020-2008} = \frac{5}{12} \approx 0,42$ milliers d'euros/an

Classement des périodes par vitesse de progression décroissante :

- 1995-2000 : 2,2 milliers d'euros/an
- 2000-2008 : 2 milliers d'euros/an
- 1980-1995 : $\approx 0,53$ milliers d'euros/an
- 2008-2020 : $\approx 0,42$ milliers d'euros/an

Tableau complété :

Période	1980-1995	1995-2000	2000-2008	2008-2020
Écart horizontal	15	5	8	12
Écart vertical	8	11	16	5
Rapport (vertical sur horizontal)	$\frac{8}{15} \approx 0,53$	$\frac{11}{5} = 2,2$	$\frac{16}{8} = 2$	$\frac{5}{12} \approx 0,42$

Rappel : Le taux de variation d'une fonction f entre deux valeurs a et b est donné par la formule :

$$\text{Taux de variation} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

1 Pour la fonction $f(x) = 3x + 1$ entre $x = 1$ et $x = 5$:

Étape 1 : Calculons $f(1)$ et $f(5)$

- $f(1) = 3 \times 1 + 1 = 3 + 1 = 4$
- $f(5) = 3 \times 5 + 1 = 15 + 1 = 16$

Étape 2 : Appliquons la formule du taux de variation

$$\frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{16 - 4}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Le taux de variation est donc 3.

2 Pour la fonction $g(x) = x^2 + x + 1$ entre $x = 5$ et $x = 10$:

Étape 1 : Calculons $g(5)$ et $g(10)$

- $g(5) = 5^2 + 5 + 1 = 25 + 5 + 1 = 31$
- $g(10) = 10^2 + 10 + 1 = 100 + 10 + 1 = 111$

Étape 2 : Appliquons la formule du taux de variation

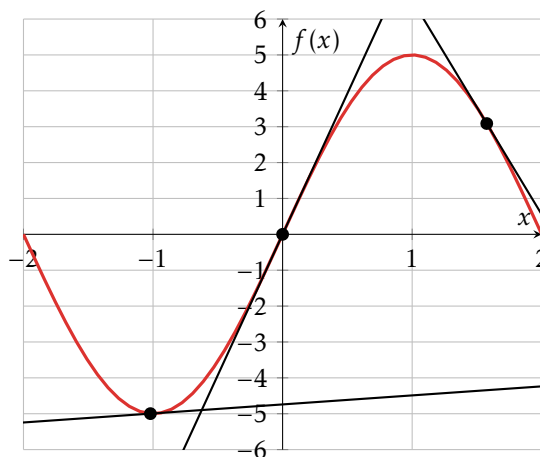
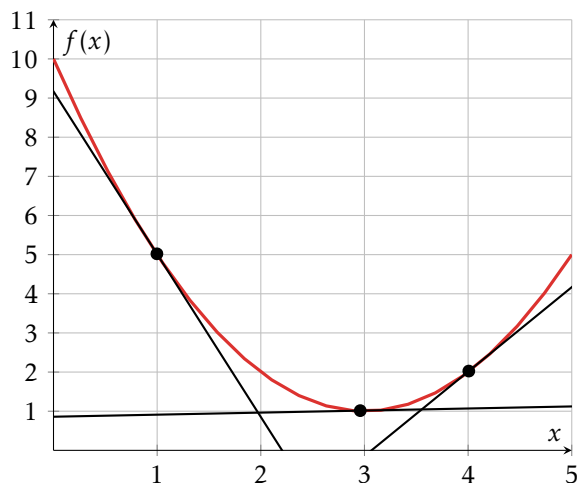
$$\frac{g(10) - g(5)}{10 - 5} = \frac{111 - 31}{5} = \frac{80}{5} = 16$$

Le taux de variation est donc 16.

Exercice 4

Solution

Tracer des tangentes

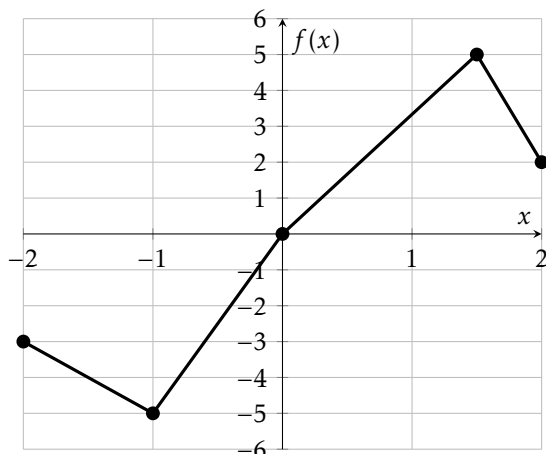


Exercice 5

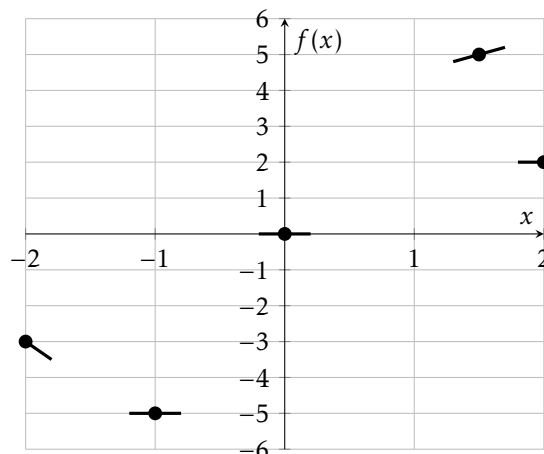
Solution

Tracer une courbe

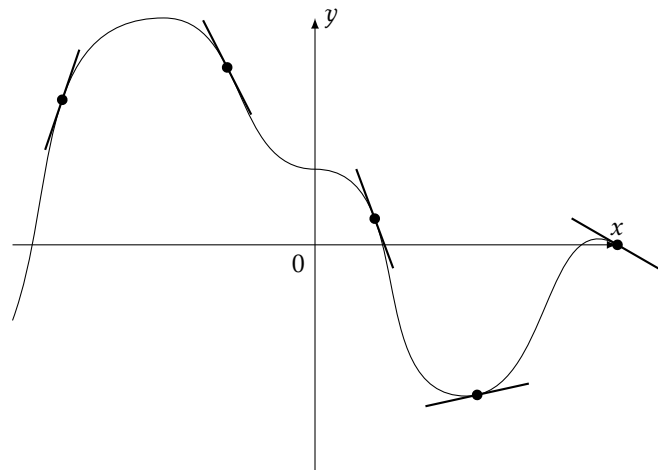
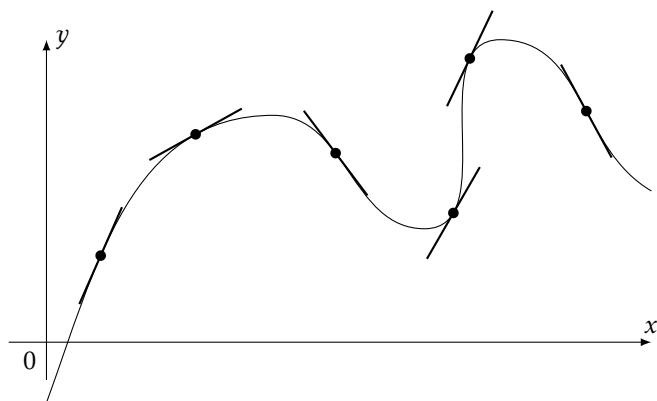
1



2



3 Tracer une courbe qui respecte les points et les tangentes représentées dans les graphiques suivants.



Exercice 6

Solution

Nombre dérivé graphique et équation tangente

Rappels :

- Le **nombre dérivé** $f'(a)$ en un point d'abscisse a est le **coefficient directeur** de la tangente à la courbe en ce point.
- L'équation d'une tangente au point $(a; f(a))$ est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$
- Pour une droite d'équation $y = mx + p$, le coefficient directeur est m .

1 Détermination des nombres dérivés :

- Pour $f'(1)$: La tangente T_1 au point $C(1; 1)$ est horizontale, donc son coefficient directeur est nul.

$$f'(1) = 0$$

- Pour $f'(-1)$: La tangente T_{-1} a pour équation $y = 4x + 1$ (on peut le vérifier car elle passe par $A(-1; -3) : 4 \times (-1) + 1 = -3$). Le coefficient directeur est 4.

$$f'(-1) = 4$$

- Pour $f'(2)$: Pour la tangente T_2 , on lit graphiquement son coefficient directeur. Elle passe par $D(2; 0)$ et par le point $(0; 4)$ (on peut le voir sur le graphique).

$$f'(2) = \frac{4 - 0}{0 - 2} = \frac{4}{-2} = -2$$

Donc $f'(2) = -2$

- Pour $f'(3)$: La tangente T_3 a pour équation $y = -4x + 9$, donc son coefficient directeur est -4 .

$$f'(3) = -4$$

Équations des tangentes :

- T_1 passe par $C(1; 1)$ et a pour coefficient directeur $f'(1) = 0$:

$$y = 0 \times (x - 1) + 1 \Rightarrow y = 1$$

- T_{-1} : On a déjà l'équation : $y = 4x + 1$

- T_2 passe par $D(2; 0)$ et a pour coefficient directeur $f'(2) = -2$:

$$y = -2(x - 2) + 0 = -2x + 4 \Rightarrow y = -2x + 4$$

- T_3 : On a déjà l'équation : $y = -4x + 9$

2 Tangente T_0 au point $O(0; 0)$:

Graphiquement, on trace la tangente à la courbe au point $O(0; 0)$.

Pour lire le coefficient directeur, on cherche deux points de la tangente faciles à repérer :

- La tangente passe par $O(0; 0)$
- Elle semble passer par le point $(1; 2)$

Le coefficient directeur est donc :

$$f'(0) = \frac{2 - 0}{1 - 0} = \frac{2}{1} = 2$$

Donc $f'(0) = 2$

3 Équations de T_{-1} et T_1 :

Ces équations ont déjà été déterminées à la question 1 :

- $T_{-1} : y = 4x + 1$

- $T_1 : y = 1$

Rappel : La vitesse instantanée à un instant donné correspond au nombre dérivé en ce point, c'est-à-dire au coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point.

1 Vitesse instantanée d'émission en 2022 :

Pour déterminer la vitesse instantanée en 2022, il faut tracer la tangente à la courbe en 2022 et calculer son coefficient directeur.

Méthode graphique :

- On trace la tangente à la courbe au point d'abscisse 2022
- On repère deux points sur cette tangente pour calculer son coefficient directeur
- La tangente semble passer approximativement par les points (2021; 18,8) et (2025; 20)

Le coefficient directeur est :

$$\text{Vitesse} = \frac{20 - 18,8}{2025 - 2021} = \frac{1,2}{4} = 0,3 \text{ millions de bitcoins par an}$$

Donc en 2022, la vitesse d'émission est d'environ 0,3 million de bitcoins/an (soit environ 300 000 bitcoins par an).

2 Période avec l'émission la plus importante :

L'émission est la plus importante quand la courbe monte le plus vite, c'est-à-dire quand la pente est la plus forte. En observant le graphique, la courbe monte le plus rapidement au début, entre 2009 et 2013.

3 Interprétation en termes de nombre dérivé :

La période où l'émission est la plus importante correspond à la période où le nombre dérivé est le plus grand (coefficient directeur de la tangente maximal).

Sur la période 2009-2013, le nombre dérivé est positif et élevé, ce qui signifie que le nombre de bitcoins émis augmente rapidement.

4 Prévision à partir de 2029 :

À partir de 2029, on observe que :

- La courbe devient presque horizontale
- Le nombre de bitcoins émis se stabilise autour de 21 millions
- L'augmentation devient très faible

Conclusion : L'émission de bitcoins devient presque nulle à partir de 2029.

5 Interprétation en termes de nombre dérivé :

À partir de 2029, le nombre dérivé tend vers 0, ce qui signifie que :

- La tangente à la courbe devient presque horizontale
- La vitesse d'émission de nouveaux bitcoins devient presque nulle
- Le nombre total de bitcoins approche d'une limite (environ 21 millions)

On dit que la fonction se stabilise ou atteint un palier.

Rappels :

- Vitesse moyenne sur un intervalle $[t_1; t_2]$: $v_{moy} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{durée}} = \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}$
- Vitesse instantanée à l'instant t : coefficient directeur de la tangente à la courbe à l'instant t (nombre dérivé)
- Conversion : 1 km/min = 60 km/h

1 Radars en mode tronçon :

a. Instants de passage devant les radars :

Par lecture graphique :

- Le premier radar (point vert) est au kilomètre 20. La voiture y passe à $t \approx$ 12,5 min
- Le deuxième radar (point vert) est au kilomètre 50. La voiture y passe à $t \approx$ 42,5 min

b. Vitesse moyenne sur le tronçon :

Données :

- Distance parcourue : $50 - 20 = 30$ km
- Durée : $42,5 - 12,5 = 30$ min

Calcul :

$$v_{moy} = \frac{30 \text{ km}}{30 \text{ min}} = 1 \text{ km/min}$$

Conversion en km/h :

$$v_{moy} = 1 \times 60 = \text{60 km/h}$$

c. Excès de vitesse ?

La vitesse moyenne est de 60 km/h. La limitation étant de 90 km/h, l'automobiliste n'est pas en excès de vitesse sur ce tronçon.

Non, pas d'excès de vitesse

2 Radars en mode instantané :

Premier radar (au km 20, à $t \approx 12,5$ min) :

- **Nombre dérivé** : Pour le déterminer, on trace la tangente à la courbe au point correspondant au premier radar. Par lecture graphique, cette tangente semble passer par les points (5; 0) et (20; 40). Le coefficient directeur (nombre dérivé) est :

$$f'(12,5) = \frac{40 - 0}{20 - 5} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3} \approx \boxed{2,67 \text{ km/min}}$$

- **Vitesse instantanée** :

$$v = 2,67 \times 60 \approx \boxed{160 \text{ km/h}}$$

- **Flash ?** La vitesse instantanée (160 km/h) dépasse largement la limitation (90 km/h).

Oui, l'automobiliste se fera flasher !

Deuxième radar (au km 50, à $t \approx 42,5$ min) :

- **Nombre dérivé** : On trace la tangente au point correspondant au deuxième radar. Cette tangente semble passer par les points (37; 40) et (47; 60). Le coefficient directeur est :

$$f'(42,5) = \frac{60 - 40}{47 - 37} = \frac{20}{10} = \boxed{2 \text{ km/min}}$$

- **Vitesse instantanée** :

$$v = 2 \times 60 = \boxed{120 \text{ km/h}}$$

- **Flash ?** La vitesse instantanée (120 km/h) dépasse la limitation (90 km/h).

Oui, l'automobiliste se fera flasher !

Conclusion : Sur le tronçon, la vitesse moyenne est acceptable, mais aux instants précis des passages devant les radars, la voiture roulait trop vite !

Exercice 9

Solution

Réactif chimique

Rappel : Dans cet exercice, la concentration **diminue** au cours du temps (la courbe descend). La vitesse d'évolution correspond à la **pente de la courbe**.

- Plus la courbe descend rapidement, plus la vitesse d'évolution (en valeur absolue) est grande
- La vitesse d'évolution correspond au **nombre dérivé**, donc au coefficient directeur de la tangente
- Quand la concentration diminue, le nombre dérivé est **négatif**

1 Comparaison des vitesses d'évolution entre 20-30 min et 30-40 min :

Méthode : On calcule le taux de variation (vitesse moyenne) sur chaque intervalle.

Entre $t = 20$ min et $t = 30$ min :

Par lecture graphique :

- $c(20) \approx 20$ mmol/L
- $c(30) \approx 10$ mmol/L

Taux de variation :

$$\frac{c(30) - c(20)}{30 - 20} = \frac{10 - 20}{10} = \frac{-10}{10} = -1 \text{ mmol/L par minute}$$

Entre $t = 30$ min et $t = 40$ min :

Par lecture graphique :

- $c(30) \approx 10$ mmol/L
- $c(40) \approx 5$ mmol/L

Taux de variation :

$$\frac{c(40) - c(30)}{40 - 30} = \frac{5 - 10}{10} = \frac{-5}{10} = -0,5 \text{ mmol/L par minute}$$

Comparaison :

- Entre 20 et 30 min : $|-1| = 1$ mmol/L/min
- Entre 30 et 40 min : $|-0,5| = 0,5$ mmol/L/min

La vitesse d'évolution est plus grande entre 20 et 30 min

Explication : La courbe descend plus rapidement entre 20 et 30 min qu'entre 30 et 40 min.

2 Moment où la vitesse d'évolution est la plus grande :

La vitesse d'évolution est la plus grande quand la **pente de la courbe est la plus forte**, c'est-à-dire quand la courbe descend le plus rapidement.

En observant le graphique, on constate que :

- La courbe descend très rapidement au début
- Elle ralentit progressivement
- La pente la plus forte est au tout début

La vitesse d'évolution est maximale au début de la réaction (vers $t = 0$ min)

Interprétation : Au début de la réaction chimique, les ions d'argent réagissent rapidement avec le fer. La concentration diminue donc très vite.

3 Instant où la vitesse d'évolution devient presque nulle :

La vitesse d'évolution devient presque nulle quand la **courbe devient presque horizontale**, c'est-à-dire quand la pente tend vers 0.

En observant le graphique :

- À partir de $t \approx 60$ min, la courbe devient presque plate
- La concentration se stabilise autour de 0 mmol/L
- La variation devient très faible

À partir de $t \approx 60$ min, la vitesse devient presque nulle

Interprétation : Après environ 60 minutes, la réaction chimique est quasiment terminée. Presque tous les ions d'argent ont réagi avec le fer. La concentration ne varie plus.

Résumé graphique :

- Au début (vers $t = 0$) : pente très forte \Rightarrow vitesse d'évolution maximale
- Au milieu (vers $t = 20 - 30$) : pente moyenne \Rightarrow vitesse d'évolution moyenne
- À la fin (vers $t \geq 60$) : pente presque nulle \Rightarrow vitesse d'évolution presque nulle