Fonction puissance - Solutions

1G EnsSci – avril 2026

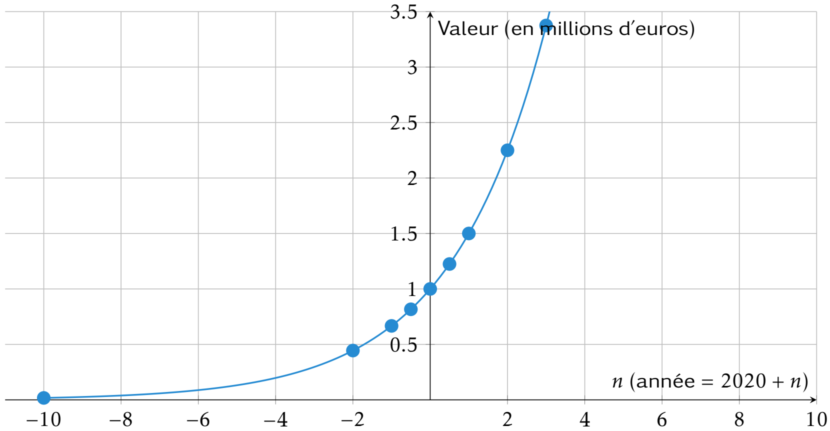
Attention – Document généré par IA

Ce document a été essentiellement généré par une intelligence artificielle (LLM) et relu dans les grandes lignes. Des erreurs, des approximations ou des méthodes inhabituelles peuvent être présentes.

Restez critique face au contenu proposé et ne le considérez pas comme une vérité absolue.

Exercice 1 — Solution — Croissance d'une entreprise

1. La valeur est multipliée par $1,5$ chaque année, donc le taux d'évolution annuel est $1,5 - 1 = 0,5$, soit **50%**.
2. La suite u est **géométrique** de premier terme $u(0) = 1\,000\,000$ et de raison $q = 1,5$.
3. On applique la formule $u(n) = u(0) \times 1,5^n$:
   - 2021 $(n = 1)$: $u(1) = 1\,000\,000 \times 1,5 = 1\,500\,000$ €
   - 2022 $(n = 2)$: $u(2) = 1\,000\,000 \times 1,5^2 = 2\,250\,000$ €
   - 2023 $(n = 3)$: $u(3) = 1\,000\,000 \times 1,5^3 = 3\,375\,000$ €
   - 2030 $(n = 10)$: $u(10) = 1\,000\,000 \times 1,5^{10} \approx 57\,665\,039$ €
4. On utilise la même formule avec des valeurs négatives de n :
   - 2019 $(n = -1)$: $u(-1) = \frac{1\,000\,000}{1,5} \approx 666\,667$ €
   - 2018 $(n = -2)$: $u(-2) = \frac{1\,000\,000}{1,5^2} \approx 444\,444$ €
   - 2010 $(n = -10)$: $u(-10) = \frac{1\,000\,000}{1,5^{10}} \approx 17\,342$ €
5. Le milieu d'une année correspond à n demi-entier :
   - Milieu 2020 $(n = 0,5)$: $u(0,5) = 1\,000\,000 \times 1,5^{0,5} \approx 1\,224\,745$ €
   - Milieu 2019 $(n = -0,5)$: $u(-0,5) = 1\,000\,000 \times 1,5^{-0,5} \approx 816\,497$ €
6. Graphique avec les points calculés (la valeur en 2030 est hors cadre) :



7. La formule générale est :

$$u(n) = 1\,000\,000 \times 1,5^n$$

   Elle est valable pour tout n réel (positif ou négatif).

Exercice 2 — Solution — Suivi d'une épidémie

1. Le nombre est multiplié par $1,5$ chaque semaine, donc le taux d'évolution hebdomadaire est **50%**.
2. La suite u est **géométrique** de premier terme $u(0) = 500$ et de raison $q = 1,5$.
3. On applique $u(n) = 500 \times 1,5^n$:
   - $u(1) = 500 \times 1,5 = 750$ personnes
   - $u(2) = 500 \times 1,5^2 = 1125$ personnes
   - $u(5) = 500 \times 1,5^5 \approx 3797$ personnes
4. Avec des valeurs négatives :
   - $u(-1) = \frac{500}{1,5} \approx 333$ personnes
   - $u(-2) = \frac{500}{1,5^2} \approx 222$ personnes

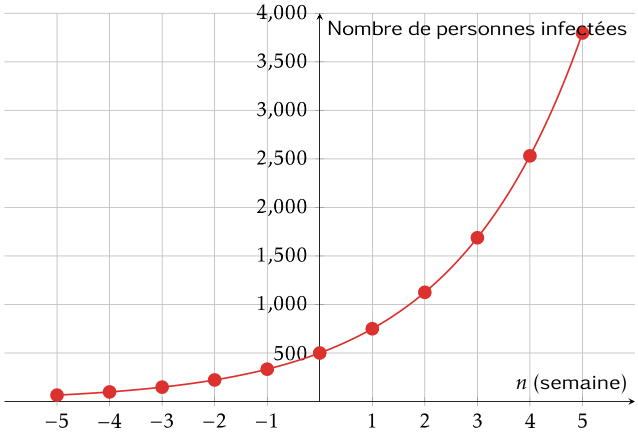
- $u(-5) = \frac{500}{1{,}5^5} \approx 66$ personnes

5 Le milieu de la semaine n correspond à $n + 0{,}5$:
- Milieu semaine 0 : $u(0{,}5) = 500 \times 1{,}5^{0{,}5} \approx 612$ personnes
- Milieu semaine 1 : $u(1{,}5) = 500 \times 1{,}5^{1{,}5} \approx 919$ personnes

6 La formule générale est :

$$u(n) = 500 \times 1{,}5^n$$

7 Graphique avec les points calculés aux semaines de −5 à 5 :



Exercice 3 — Solution — Lien entre la fonction et le graphique

Pour identifier chaque courbe, on utilise deux critères : le sens de variation (la base est-elle > 1 ou < 1?) et la vitesse de croissance/décroissance.

- **Courbe bleue** (croissance la plus rapide) $\longrightarrow f(x) = 3^x$ (base la plus grande)
- **Courbe orange** (croissance intermédiaire) $\longrightarrow i(x) = 2^x$
- **Courbe rouge** (croissance la plus lente) $\longrightarrow g(x) = 1{,}5^x$
- **Courbe violette** (décroissance lente) $\longrightarrow j(x) = 0{,}8^x$ (base proche de 1)
- **Courbe verte** (décroissance la plus rapide) $\longrightarrow h(x) = 0{,}1^x$ (base très petite)

Rappel : toutes ces fonctions valent 1 en $x = 0$. Les fonctions croissantes ont une base > 1, les fonctions décroissantes ont une base comprise entre 0 et 1.

Exercice 4 — Solution — Concentration dans le sang

1 En utilisant le tableau :
- $Q(0) = 4 \times 1{,}00 = 4$ mg : c'est la dose initiale injectée.
- $Q(10) = 4 \times 0{,}20 = 0{,}80$ mg : après 10 minutes, il ne reste que 0,80 mg dans le sang.
- $Q(5{,}5) = 4 \times 0{,}41 = 1{,}64$ mg : au bout de 5 minutes et 30 secondes, il reste 1,64 mg.

2 La base $0{,}85 < 1$, donc Q est **décroissante**. Cela signifie que la quantité de médicament dans le sang diminue au fil du temps : l'organisme élimine progressivement le médicament.

3 1h30 = 90 minutes. On applique la formule :

$$Q(90) = 4 \times 0{,}85^{90} \approx 0{,}000002 \text{ mg}$$

La quantité est pratiquement nulle : le médicament a été presque totalement éliminé.

4 D'après le tableau :
- $Q(8) = 4 \times 0{,}27 = 1{,}08$ mg > 1 mg : le médicament est encore efficace.
- $Q(9) = 4 \times 0{,}23 = 0{,}92$ mg < 1 mg : le médicament n'est plus efficace.

Le médicament devient inefficace **entre 8 et 9 minutes** après l'injection.

Exercice 5 — Solution — Dépréciation d'un véhicule

1 En utilisant le tableau :
- $V(0) = 20\,000 \times 1{,}00 = 20\,000$ € : c'est le prix d'achat neuf.
- $V(1) = 20\,000 \times 0{,}89 = 17\,800$ € : après un an, le véhicule vaut 17 800 €.
- $V(5) = 20\,000 \times 0{,}56 = 11\,200$ € : après 5 ans, le véhicule vaut 11 200 €.

2 La base $0{,}89 < 1$, donc V est **décroissante**. Le véhicule perd de la valeur chaque année : il se déprécie avec le temps.

3 3 ans et 6 mois = 3,5 ans. D'après le tableau :

$$V(3{,}5) = 20\,000 \times 0{,}67 = 13\,400 \text{ €}$$

4 D'après le tableau :
- $V(5) = 20\,000 \times 0{,}56 = 11\,200$ € $> 11\,000$ € : le véhicule vaut encore assez.
- $V(6) = 20\,000 \times 0{,}50 = 10\,000$ € $< 11\,000$ € : le véhicule vaut trop peu.

L'entreprise devra revendre le véhicule **entre 5 et 6 ans** après l'achat.

5 $V(10) = 20\,000 \times 0{,}31 = 6\,200$ €.

Le modèle prédit que le véhicule vaut encore 6 200 € après 10 ans. En réalité, un véhicule peut avoir une valeur plancher (valeur à la casse) ou devenir hors d'usage. **Le modèle n'est plus très pertinent à long terme.**

Exercice 6 Solution Découpage de l'année

1 Modélisation

a. $1000 \times 1{,}3 = 1\,300$ abonnés au début 2025.

b. On note x le nombre d'années écoulées depuis début 2024 :

$$f(x) = 1000 \times 1{,}3^x$$

2 Découpage en semestre

Un semestre = $0{,}5$ an.

a. $f(0{,}5) = 1000 \times 1{,}3^{0{,}5} \approx 1\,140$ abonnés.

b. Le coefficient multiplicateur semestriel est $1{,}3^{0{,}5} \approx 1{,}1402$.
Taux d'évolution du S1 : $1{,}1402 - 1 \approx$ **14,02**%.

c. Par symétrie de la fonction exponentielle, le coefficient multiplicateur du S2 est le même : $1{,}3^{0{,}5} \approx 1{,}1402$.
Taux d'évolution du S2 : $\approx$ **14,02**%.
Vérification : $1{,}1402^2 \approx 1{,}3$ ✓

d. Le coefficient multiplicateur moyen par semestre est $CM = 1{,}3^{1/2} \approx 1{,}1402$.
Le taux d'évolution moyen par semestre est $CM - 1 \approx$ **14,02**%.

3 Découpage en trimestre

Un trimestre = $0{,}25$ an.

a. $f(0{,}25) = 1000 \times 1{,}3^{0{,}25} \approx 1\,068$ abonnés.

b. Le coefficient multiplicateur trimestriel est $1{,}3^{0{,}25} \approx 1{,}0678$.
Taux d'évolution du T1 : $1{,}0678 - 1 \approx$ **6,78**%.

c. Le coefficient multiplicateur moyen par trimestre est $CM = 1{,}3^{1/4} \approx 1{,}0678$.
Le taux d'évolution moyen par trimestre est $CM - 1 \approx$ **6,78**%.

4 Découpage en mois

a. Un mois = $\frac{1}{12}$ an. Le coefficient multiplicateur moyen par mois est $CM = 1{,}3^{1/12} \approx 1{,}0221$.
Le taux d'évolution moyen par mois est $CM - 1 \approx$ **2,21**%.

Exercice 7 Solution CA d'un commerce

1 On applique successivement les coefficients multiplicateurs :

- CA 2021 : $30\,000 \times 1{,}20 = 36\,000$ €
- CA 2022 : $36\,000 \times 1{,}25 = 45\,000$ €
- CA 2023 : $45\,000 \times 1{,}30 = 58\,500$ €

2 Le coefficient multiplicateur global est :

$$1{,}20 \times 1{,}25 \times 1{,}30 = 1{,}95$$

Le taux d'évolution global est $1{,}95 - 1 =$ **95%**.

3 Le coefficient multiplicateur moyen annuel CM vérifie $CM^3 = 1{,}95$, donc :

$$CM = 1{,}95^{1/3} \approx 1{,}2493$$

Le taux d'évolution moyen annuel est $CM - 1 \approx$ **24,93%**.

Exercice 8 Solution Sociétaires d'une mutuelle

1 Le coefficient multiplicateur global est :

$$1{,}10 \times 1{,}06 \times 1{,}05 = 1{,}2243$$

Le taux d'évolution global est $1{,}2243 - 1 = 22{,}43\%$.
Vérification : $506\,000 \times 1{,}2243 \approx 619\,496$ et $\frac{619\,496 - 506\,000}{506\,000} \approx 22{,}43\%$ ✓

2 Le coefficient multiplicateur moyen annuel CM vérifie $CM^3 = 1{,}2243$, donc :

$$CM = 1{,}2243^{1/3} \approx 1{,}0698$$

Le taux d'évolution annuel moyen est $CM - 1 \approx$ **6,98%**.

1 Le coefficient multiplicateur global est $CM = 1{,}20$ en 10 ans. Le coefficient multiplicateur moyen annuel vérifie $CM_{\text{moy}}^{10} = 1{,}20$, donc :

$$CM_{\text{moy}} = 1{,}20^{1/10} \approx 1{,}0184$$

Le taux d'évolution moyen annuel est $CM_{\text{moy}} - 1 \approx$ **1,84%**.

2
a. Le coefficient multiplicateur global est $CM = \frac{385}{60} \approx 6{,}417$.
Le taux d'évolution global est $CM - 1 \approx 5{,}417 =$ **541,7%**.

b. Il y a $2009 - 2002 = 7$ années. Le coefficient multiplicateur moyen annuel vérifie $CM_{\text{moy}}^{7} = \frac{385}{60}$, donc :

$$CM_{\text{moy}} = \left(\frac{385}{60}\right)^{1/7} \approx 1{,}3042$$

Le taux d'évolution moyen annuel est $CM_{\text{moy}} - 1 \approx$ **30,42%**.

3
a. Le coefficient multiplicateur global est $CM = \frac{555\,239}{620\,214} \approx 0{,}8952$.
Le taux d'évolution global est $CM - 1 \approx -0{,}1048 =$ **-10,48%**.

b. Il y a $2015 - 2011 = 4$ années. Le coefficient multiplicateur moyen annuel vérifie $CM_{\text{moy}}^{4} = \frac{555\,239}{620\,214}$, donc :

$$CM_{\text{moy}} = \left(\frac{555\,239}{620\,214}\right)^{1/4} \approx 0{,}9727$$

Le taux d'évolution moyen annuel est $CM_{\text{moy}} - 1 \approx$ **-2,73%**.
Le nombre d'abonnés diminue en moyenne de 2,73% par an.