

Dérivation point de vue local - Solutions

1G_{math} – octobre 2025

Exercice 1

Solution

Vitesse moyenne d'une balle

- La hauteur de la balle après 5 s est $h(5) = -0,1 \times 5^2 + 2 \times 5 = -2,5 + 10 = 7,5$ m.
- La vitesse moyenne verticale entre $t = 0$ et $t = 4$ est :

$$\frac{h(4) - h(0)}{4 - 0} = \frac{(-0,1 \times 16 + 8) - 0}{4} = \frac{6,4}{4} = 1,6 \text{ m/s}$$

- La vitesse moyenne verticale entre $t = 2$ et $t = 10$ est :

$$\frac{h(10) - h(2)}{10 - 2} = \frac{(-0,1 \times 100 + 20) - (-0,1 \times 4 + 4)}{8} = \frac{10 - 3,6}{8} = \frac{6,4}{8} = 0,8 \text{ m/s}$$

- La vitesse moyenne verticale entre $t = 10$ et $t = 16$ est :

$$\frac{h(16) - h(10)}{16 - 10} = \frac{(-0,1 \times 256 + 32) - 10}{6} = \frac{6,4 - 10}{6} = \frac{-3,6}{6} = -0,6 \text{ m/s}$$

- Graphiquement, le signe de la vitesse moyenne correspond au signe du coefficient directeur de la droite qui relie les deux points considérés :
 - Si la droite monte (de gauche à droite), la vitesse moyenne est positive.
 - Si la droite descend (de gauche à droite), la vitesse moyenne est négative.
 - Si la droite est horizontale, la vitesse moyenne est nulle.

Exercice 2

Solution

Résultats d'une entreprise

- Graphique : placer les points (1980, 10), (1995, 18), (2000, 29), (2008, 45) et (2020, 50) dans un repère.
- Graphiquement, on observe que la progression semble la plus rapide entre 1995 et 2000 (la pente de la droite reliant ces deux points est la plus importante).
- Calcul des vitesses de progression (taux de variation) :
 - 1980-1995 : $\frac{18-10}{1995-1980} = \frac{8}{15} \approx 0,53$ milliers d'euros/an
 - 1995-2000 : $\frac{29-18}{2000-1995} = \frac{11}{5} = 2,2$ milliers d'euros/an
 - 2000-2008 : $\frac{45-29}{2008-2000} = \frac{16}{8} = 2$ milliers d'euros/an
 - 2008-2020 : $\frac{50-45}{2020-2008} = \frac{5}{12} \approx 0,42$ milliers d'euros/an

Classement des périodes par vitesse de progression décroissante :

- 1995-2000 : 2,2 milliers d'euros/an
- 2000-2008 : 2 milliers d'euros/an
- 1980-1995 : $\approx 0,53$ milliers d'euros/an
- 2008-2020 : $\approx 0,42$ milliers d'euros/an

Tableau complété :

Période	1980-1995	1995-2000	2000-2008	2008-2020
Écart horizontal	15	5	8	12
Écart vertical	8	11	16	5
Rapport (vertical sur horizontal)	$\frac{8}{15} \approx 0,53$	$\frac{11}{5} = 2,2$	$\frac{16}{8} = 2$	$\frac{5}{12} \approx 0,42$

Exercice 3

Solution

Taux de variations

- $\frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{(3 \times 5 + 1) - (3 \times 1 + 1)}{4} = \frac{16-4}{4} = \frac{12}{4} = 3$
- $\frac{g(10)-g(5)}{10-5} = \frac{(10^2+10+1) - (5^2+5+1)}{5} = \frac{111-31}{5} = \frac{80}{5} = 16$
- $\frac{h(-3)-h(-1)}{-3-(-1)} = \frac{\frac{1}{-3} - \frac{1}{-1}}{-2} = \frac{-\frac{1}{3} + 1}{-2} = \frac{\frac{2}{3}}{-2} = -\frac{1}{3}$
- $\frac{s(0,5)-s(1)}{0,5-1} = \frac{\sqrt{0,5}-\sqrt{1}}{-0,5} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}{-0,5} = \frac{\frac{\sqrt{2}-2}{2}}{-0,5} = \frac{\sqrt{2}-2}{-1} = 2 - \sqrt{2} \approx 0,59$

1. Pour la fonction $f(x) = (x - 3)^2 + 1$

(a) $f(1) = (1 - 3)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

(b) Taux de variation entre 1 et 5 : $\frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{((5-3)^2+1)-5}{4} = \frac{5-5}{4} = 0$

(c) Taux de variation entre 1 et 4 : $\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{((4-3)^2+1)-5}{3} = \frac{2-5}{3} = -1$

(d) Taux de variation entre 1 et 3 : $\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{((3-3)^2+1)-5}{2} = \frac{1-5}{2} = -2$

Taux de variation entre 1 et 2 : $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{((2-3)^2+1)-5}{1} = \frac{2-5}{1} = -3$

Taux de variation entre 1 et 1,5 : $\frac{f(1,5)-f(1)}{1,5-1} = \frac{((1,5-3)^2+1)-5}{0,5} = \frac{3,25-5}{0,5} = -3,5$

On observe que plus le point se rapproche de A, plus le taux de variation diminue (en valeur absolue, il augmente). La limite semble être -4 (coefficient directeur de la tangente en $x = 1$).

2. Pour la fonction $g(x) = \sqrt{x}$

(a) $g(1) = \sqrt{1} = 1$ et $g(2) = \sqrt{2}$

(b) Taux de variation entre 1 et 5 : $\frac{g(5)-g(1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0,31$

(c) Taux de variation entre 1 et 4 : $\frac{g(4)-g(1)}{4-1} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3} \approx 0,33$

(d) En faisant se rapprocher le point de A, on trace des cordes dont le coefficient directeur tend vers $\frac{1}{2} = 0,5$ qui est le coefficient directeur de la tangente à la courbe en $x = 1$.

Exercice 5

Solution

Tracer des tangentes

$$xf(x)^2 + 1;$$

$$xf(x)$$

Exercice 6

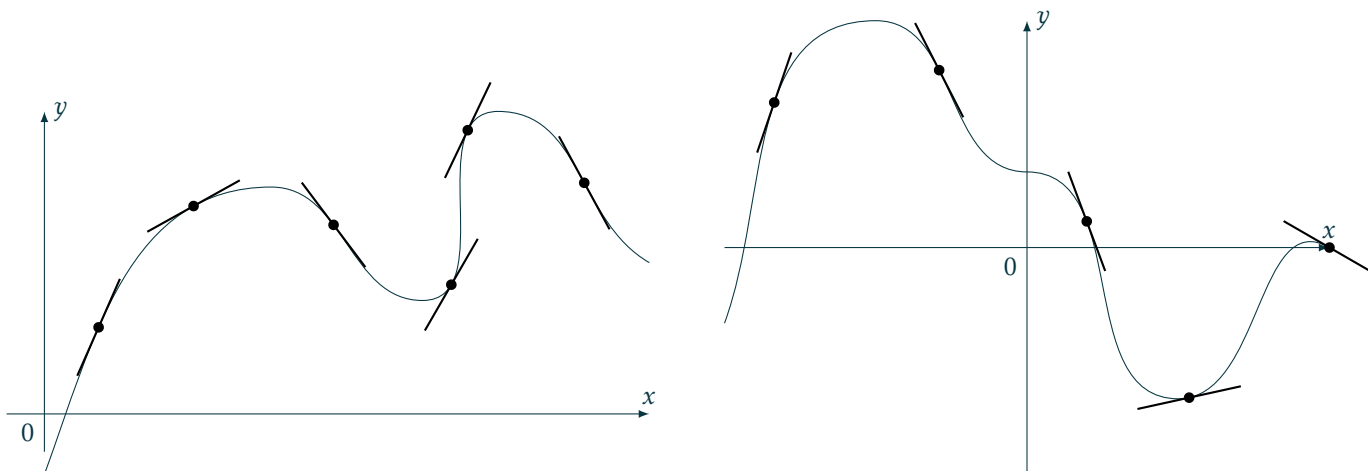
Solution

Tracer une courbe

1. $xf(x)$

2. $xf(x)$

3. Tracer une courbe qui respecte les points et les tangentes représentées dans les graphiques suivants.



Exercice 7

Solution

Calculer une vitesse

1. Le taux de variation de d entre 2 et $2 + h$ est :

$$\begin{aligned} \frac{d(2+h) - d(2)}{(2+h) - 2} &= \frac{4,9(2+h)^2 - 4,9 \times 2^2}{h} \\ &= \frac{4,9(4 + 4h + h^2) - 19,6}{h} \\ &= \frac{19,6 + 19,6h + 4,9h^2 - 19,6}{h} \\ &= \frac{19,6h + 4,9h^2}{h} \\ &= 19,6 + 4,9h \end{aligned}$$

2. La vitesse instantanée au bout de 2 secondes est obtenue quand $h \rightarrow 0$:

$$19,6 + 4,9h \rightarrow 19,6 \text{ m/s}$$

3. Le taux de variation de d entre 10 et $10 + h$ est :

$$\begin{aligned}\frac{d(10+h) - d(10)}{h} &= \frac{4,9(10+h)^2 - 4,9 \times 10^2}{h} \\ &= \frac{4,9(100 + 20h + h^2) - 490}{h} \\ &= \frac{490 + 98h + 4,9h^2 - 490}{h} \\ &= 98 + 4,9h\end{aligned}$$

La vitesse instantanée au bout de 10 secondes est obtenue quand $h \rightarrow 0$:

$$98 + 4,9h \rightarrow 98 \text{ m/s}$$

Exercice 8

Solution

Calculer un nombre dérivé

1. Soit $f(x) = x^2$

(a) Le taux de variation de f entre 1 et $1 + h$ est :

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} \\ &= \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \\ &= \frac{2h + h^2}{h} \\ &= 2 + h\end{aligned}$$

(b) Le nombre dérivé de f en 1 est : quand $h \rightarrow 0$, $2 + h \rightarrow 2$ donc $f'(1) = 2$

2. Soit $f(x) = 2x^2 + x$

(a) Le taux de variation de f entre 1 et $1 + h$ est :

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \frac{(2(1+h)^2 + (1+h)) - (2 \times 1^2 + 1)}{h} \\ &= \frac{(2(1 + 2h + h^2) + 1 + h) - 3}{h} \\ &= \frac{2 + 4h + 2h^2 + 1 + h - 3}{h} \\ &= \frac{5h + 2h^2}{h} \\ &= 5 + 2h\end{aligned}$$

(b) Le nombre dérivé de f en 1 est : quand $h \rightarrow 0$, $5 + 2h \rightarrow 5$ donc $f'(1) = 5$

3. (*) Soit $f(x) = \frac{1}{x}$

(a) Le taux de variation de f entre 2 et $2 + h$ est :

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} \\ &= \frac{\frac{2 - (2+h)}{2(2+h)}}{h} \\ &= \frac{\frac{-h}{2(2+h)}}{h} \\ &= \frac{-1}{2(2+h)}\end{aligned}$$

(b) Le nombre dérivé de f en 2 est : quand $h \rightarrow 0$, $\frac{-1}{2(2+h)} \rightarrow \frac{-1}{4}$ donc $f'(2) = \frac{-1}{4}$

4. (*) Soit la fonction $f : x \mapsto 2x - 1$ définie sur \mathbb{R} .

(a) Pour tout réel a et pour tout $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(2(a+h) - 1) - (2a - 1)}{h} \\ &= \frac{2a + 2h - 1 - 2a + 1}{h} \\ &= \frac{2h}{h} \\ &= 2\end{aligned}$$

(b) Le nombre dérivé : quand $h \rightarrow 0$, $2 \rightarrow 2$ donc $f'(a) = 2$ pour tout réel a .

(c) La fonction f est une fonction affine de coefficient directeur 2. La tangente à la courbe en tout point est confondue avec la droite elle-même, donc elle a le même coefficient directeur 2. Cela confirme que $f'(1) = 2$.

Exercice 9 _____ **Solution** _____ **Nombre dérivé graphique et équation tangente**

1. Détermination des nombres dérivés et équations des tangentes :

- $f'(1) = 0$ (la tangente T_1 est horizontale). Équation de $T_1 : y = 1$
- $f'(-1) = 4$ (coefficient directeur de T_{-1}). Équation de $T_{-1} : y = 4(x - (-1)) + (-3) = 4x + 1$
- $f'(2) = -2$ (on peut le déterminer à partir de la tangente T_2 qui passe par $(2; 0)$ et $(0; 4)$). Équation de $T_2 : y = -2(x - 2) + 0 = -2x + 4$
- $f'(3) = -4$ (coefficient directeur donné dans l'équation $T_3 : y = -4x + 9$). Équation de $T_3 : y = -4x + 9$

2. Calcul du taux de variation :

$$\begin{aligned} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \frac{(-h^2 + 2h) - 0}{h} \\ &= \frac{-h^2 + 2h}{h} \\ &= -h + 2 \end{aligned}$$

- 3. Le nombre dérivé de f en 0 est :** quand $h \rightarrow 0, -h + 2 \rightarrow 2$ donc $f'(0) = 2$
- 4. L'équation de la tangente T_0 en $(0; 0)$ est :** $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 2x + 0 = 2x$
La tangente T_0 passe par l'origine et a un coefficient directeur de 2.

Exercice 10 _____ **Solution** _____ **Calculer équation tangente**

1. Soit $f(x) = x^2$

(a) $f(2) = 2^2 = 4$

(b) Le taux de variation de f entre 2 et $2 + h$ est :

$$\begin{aligned} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} \\ &= \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} \\ &= \frac{4h + h^2}{h} \\ &= 4 + h \end{aligned}$$

(c) Quand $h \rightarrow 0, 4 + h \rightarrow 4$ donc $f'(2) = 4$

(d) L'équation de la tangente à f en $x = 2$ est : $y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 4(x - 2) + 4 = 4x - 4$

2. Soit $f(x) = 2x^2 + 4$

(a) Le taux de variation de f entre 0 et $0 + h$ est :

$$\begin{aligned} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \frac{(2h^2 + 4) - 4}{h} \\ &= \frac{2h^2}{h} \\ &= 2h \end{aligned}$$

(b) Quand $h \rightarrow 0, 2h \rightarrow 0$ donc $f'(0) = 0$

(c) L'équation de la tangente à f en $x = 0$ est : $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 0 \cdot x + 4 = 4$

3. (*) Soit $f(x) = \frac{1}{x}$

(a) Le taux de variation de f entre 1 et $1 + h$ est :

$$\begin{aligned} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} \\ &= \frac{\frac{1-(1+h)}{1+h}}{h} \\ &= \frac{\frac{-h}{1+h}}{h} \\ &= \frac{-1}{1+h} \end{aligned}$$

(b) Quand $h \rightarrow 0, \frac{-1}{1+h} \rightarrow -1$ donc $f'(1) = -1$

(c) L'équation de la tangente à f en $x = 1$ est : $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -1(x - 1) + 1 = -x + 2$