Probabilité conditionnelle - Solutions

1G math – octobre 2025

Exercice 1 — Solution — Mobilités

1. Tableau complété :

	Centre-ville	Périphérie	Total
Voiture	30	150	180
Vélo	30	90	120
À pied	300	0	300
Autre	150	450	600
Total	510	690	1 200

Explications :

- Total centre-ville : $1200 \times 0.425 = 510$
- Total périphérie : $1200 - 510 = 690$
- Autre (transports en commun) : $1200 \times 0.50 = 600$ dont $600 \times 0.75 = 450$ en périphérie et 150 en centre-ville
- Voiture : 180 dont 30 en centre-ville et 150 en périphérie
- À pied : $1200 \times 0.25 = 300$
- Vélo : on note x le nombre de cyclistes en centre-ville, alors $3x$ en périphérie
- Total : $180 + 4x + 300 + 600 = 1200 \Rightarrow x = 30$
- Pour à pied : centre-ville $= 510 - 30 - 30 - 150 = 300$ et périphérie $= 0$

2. Avec $A = \{$habite en centre-ville$\}$ et $B = \{$utilise le vélo$\}$
   - $A \cap B$: élèves qui habitent en centre-ville ET utilisent le vélo $\Rightarrow$ effectif = 30
   - $A \cup B$: élèves qui habitent en centre-ville OU utilisent le vélo $\Rightarrow$ effectif $= 510 + 120 - 30 = 600$
   - $\overline{A}$: élèves qui n'habitent pas en centre-ville (habitent en périphérie) $\Rightarrow$ effectif = 690
   - $\overline{A} \cap B$: élèves qui habitent en périphérie ET utilisent le vélo $\Rightarrow$ effectif = 90
   - $\overline{A \cup B}$: élèves qui n'habitent pas en centre-ville ET n'utilisent pas le vélo $\Rightarrow$ effectif $= 690 - 90 = 600$

Exercice 2 — Solution — Orientation

1. $P(G \cap S) = \frac{22}{78} = \frac{11}{39}$
2. $P_G(S) = \frac{22}{43}$
3. $P(F \cap D) = \frac{5}{78}$
4. $P_D(F) = \frac{5}{16}$
5. $P(G \cup M) = \frac{43 + 30 - 10}{78} = \frac{63}{78} = \frac{21}{26}$
6. $P_F(M) = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$

Exercice 3 — Solution — Impression de livres

1. Tableau croisé pour 100 livres :

	Poche	Non poche	Total
Romans	45	15	60
Essais	5	20	25
Poésie	10	5	15
Total	60	40	100

Détails :

- Romans : 60 dont $60 \times \frac{1}{4} = 15$ non poche et 45 poche
- Essais : 25 dont $25 \times \frac{1}{5} = 5$ poche et 20 non poche
- Poésie : $100 - 60 - 25 = 15$ dont $15 \times \frac{2}{3} = 10$ poche et 5 non poche

2. (a) $P(E) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ et $P(P) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$

   (b) $E \cap P$: le livre est un essai ET au format poche $\Rightarrow P(E \cap P) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

   (c) $\overline{E}$: le livre n'est pas un essai $\Rightarrow P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

3. $P_E(P) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

   Interprétation : Parmi les essais, $\frac{1}{5}$ (soit 20%) sont au format poche.

4. $P_E(P) = 0.20$ (probabilité qu'un essai soit au format poche)

Exercice 4 — Solution — Villes et voitures

On note A, B et C les événements "l'habitant vient de la ville A (resp. B, C)" et V l'événement "l'habitant n'a pas de voiture".

- $P(A \cap V) = P(A) \times P_A(V) = 0.12 \times 0.30 = 0.036$
  La probabilité qu'un habitant vienne de la ville A et n'ait pas de voiture est 0.036 soit 3.6%.
- $P(B \cap V) = P(B) \times P_B(V) = 0.38 \times 0.10 = 0.038$
  La probabilité qu'un habitant vienne de la ville B et n'ait pas de voiture est 0.038 soit 3.8%.
- $P(C \cap V) = P(C) \times P_C(V) = 0.50 \times 0.16 = 0.080$
  La probabilité qu'un habitant vienne de la ville C et n'ait pas de voiture est 0.080 soit 8%.

Exercice 5 — Solution — Court de tennis

1. Nombre d'heures d'ouverture : 10 heures par jour $\times$ 7 jours $= 70$ heures par semaine
2. Tableau croisé (pour un terrain sur une semaine) :

	Heures creuses	Heures pleines	Total
Terrain occupé	4.2	44.1	48.3
Terrain libre	16.8	4.9	21.7
Total	21	49	70

   Détails :
   - Heures pleines : $70 \times 0.70 = 49$ heures
   - Heures creuses : $70 \times 0.30 = 21$ heures
   - Terrain occupé en heures pleines : $49 \times 0.90 = 44.1$ heures
   - Terrain occupé en heures creuses : $21 \times 0.20 = 4.2$ heures
3. $P(C) = \frac{21}{70} = \frac{3}{10} = 0.30$
   Interprétation : La probabilité qu'une heure choisie au hasard soit une heure creuse est de 30%.
   $P(O) = \frac{48.3}{70} = \frac{483}{700} = 0.69$
   Interprétation : La probabilité qu'un terrain choisi à une heure au hasard soit occupé est de 69%.
4. $P(C \cap O) = \frac{4.2}{70} = \frac{42}{700} = \frac{3}{50} = 0.06$
   Interprétation : La probabilité qu'une heure soit creuse ET que le terrain soit occupé est de 6%.
   $P_O(C) = \frac{4.2}{48.3} = \frac{42}{483} = \frac{14}{161} \approx 0.087$
   Interprétation : Sachant que le terrain est occupé, la probabilité que ce soit une heure creuse est d'environ 8.7%.
5. Somme espérée par terrain pour une semaine :

$$\begin{aligned} E &= 44.1 \times 10 + 4.2 \times 6 \\ &= 441 + 25.2 \\ &= 466.2 \text{ euros} \end{aligned}$$

   Un terrain peut rapporter en moyenne 466.20€ par semaine.

Exercice 6 — Solution — Dopage

1. "Le comité a fait une erreur" signifie que le test s'est trompé, c'est-à-dire :
   - Soit un sportif dopé est déclaré négatif (faux négatif)
   - Soit un sportif non dopé est déclaré positif (faux positif)
2. Tableau croisé pour 50 personnes avec n sportifs dopés :

	Dopé	Non dopé	Total
Positif	$0.95n$	$0.1(50-n)$	$0.85n+5$
Négatif	$0.05n$	$0.9(50-n)$	$45-0.85n$
Total	n	$50-n$	50

3. On cherche $P_{\text{Positif}}(\text{Dopé})$:

$$\begin{aligned} P_{\text{Positif}}(\text{Dopé}) &= \frac{\text{nombre de dopés testés positif}}{\text{nombre total de positifs}} \\ &= \frac{0.95n}{0.85n+5} \end{aligned}$$

4. Résolvons $P_{\text{Positif}}(\text{Dopé}) > 0.95$:

$$\begin{aligned}\frac{0.95n}{0.85n+5} &> 0.95\\ 0.95n &> 0.95(0.85n+5)\\ 0.95n &> 0.8075n+4.75\\ 0.1425n &> 4.75\\ n &> \frac{4.75}{0.1425}\\ n &> 33.33...\end{aligned}$$

Donc $n \geq 34$.
Interprétation : Pour que la probabilité qu'un sportif déclaré positif soit réellement dopé soit supérieure à 95%, il faut qu'au moins 34 sportifs sur 50 soient dopés, soit plus de 68% de dopés dans la population testée. Cela montre que même avec un test très performant, si la prévalence du dopage est faible, beaucoup de positifs seront des faux positifs.

Exercice 7 — Solution — Tests Covid

1. D'après l'article :
   - Sensibilité : 70% $\Rightarrow P_I(P) = 0.70$ (probabilité d'être testé positif sachant qu'on est infecté)
   - Spécificité : 95% $\Rightarrow P_{\bar{I}}(\overline{P}) = 0.95$ (probabilité d'être testé négatif sachant qu'on n'est pas infecté)
     On en déduit : $P_{\bar{I}}(P) = 1 - 0.95 = 0.05$ (probabilité d'être testé positif sachant qu'on n'est pas infecté)
2. **Cas 1 :** 1% de la population infectée (1000 individus)
   (a) Tableau complété :

	infecté	non infecté	total
Test positif	7	49.5	56.5
Test négatif	3	940.5	943.5
total	10	990	1000

   Calculs :
   - Infectés : $1000 \times 0.01 = 10$
   - Non infectés : $1000 - 10 = 990$
   - Infectés testés positifs : $10 \times 0.70 = 7$
   - Infectés testés négatifs : $10 \times 0.30 = 3$
   - Non infectés testés positifs : $990 \times 0.05 = 49.5$
   - Non infectés testés négatifs : $990 \times 0.95 = 940.5$

   (b) $P_P(I) = \dfrac{7}{56.5} \approx 0.124$ soit environ 12.4%
   Seulement 12% des personnes testées positives sont réellement infectées !
   (c) $P_{\overline{P}}(I) = \dfrac{3}{943.5} \approx 0.003$ soit environ 0.3%
   Un test négatif est très fiable : la personne a très peu de chances d'être infectée.
3. **Cas 2 :** 10% de la population infectée (1000 individus)

	infecté	non infecté	total
Test positif	70	45	115
Test négatif	30	855	885
total	100	900	1000

   - $P_P(I) = \dfrac{70}{115} \approx 0.609$ soit environ 60.9%
   - $P_{\overline{P}}(I) = \dfrac{30}{885} \approx 0.034$ soit environ 3.4%
4. **Cas 3 :** 30% de la population infectée (1000 individus)

	infecté	non infecté	total
Test positif	210	35	245
Test négatif	90	665	755
total	300	700	1000

- $P_P(I) = \dfrac{210}{245} \approx 0.857$ soit environ 85.7%
- $P_{\overline{P}}(I) = \dfrac{90}{755} \approx 0.119$ soit environ 11.9%

5. **Conclusion :** Ces tests montrent que même avec un test moyennement performant (70% de sensibilité et 95% de spécificité), la fiabilité d'un résultat positif dépend fortement de la prévalence de la maladie dans la population :
   - Avec 1% d'infectés, un test positif n'a que 12.4% de chances de correspondre à une vraie infection
   - Avec 10% d'infectés, ce taux monte à 60.9%
   - Avec 30% d'infectés, ce taux atteint 85.7%

   Cela illustre l'importance du contexte épidémiologique dans l'interprétation des résultats de tests. Avec une faible prévalence, un test positif est très peu fiable. En revanche, un test négatif reste performant pour écarter l'infection : le risque d'être infecté malgré un test négatif est faible (0.3% à 1% de prévalence, 3.4% à 10%, et 11.9% à 30%).