Suites arithmétiques et géométriques - Solutions

1G math – novembre 2025

Exercice 1 — Solution — Alerte générale

Méthode 1 : Le communicateur télépathe

Chaque jour, $1\,000\,000$ nouvelles personnes sont alertées.
Notons u_n le nombre de personnes au courant après n jours.

- $u_0 = 2$ (Faïza et Bob)
- $u_1 = 2 + 1\,000\,000 = 1\,000\,002$
- $u_2 = 1\,000\,002 + 1\,000\,000 = 2\,000\,002$
- Pour tout n, $u_{n+1} = u_n + 1\,000\,000$

C'est une **suite arithmétique** de raison $r = 1\,000\,000$ et de premier terme $u_0 = 2$.
Son terme général est : $u_n = 2 + n \times 1\,000\,000$
Pour alerter 7 milliards de personnes : $u_n \geq 7\,000\,000\,000$

$$\begin{aligned} 2 + n \times 1\,000\,000 &\geq 7\,000\,000\,000 \\ n \times 1\,000\,000 &\geq 6\,999\,999\,998 \\ n &\geq 6\,999{,}99998 \end{aligned}$$

Il faudrait donc environ **7 000 jours** (soit environ **19 ans**) !

Méthode 2 : Chacun alerte 2 nouvelles personnes

Notons v_n le nombre de personnes au courant après n jours.

- $v_0 = 2$ (Faïza et Bob)
- $v_1 = 2 + 2 \times 2 = 6$ (chacun des 2 alerte 2 personnes)
- $v_2 = 6 + 6 \times 2 = 18$ (chacune des 6 alerte 2 personnes)
- Pour tout n, $v_{n+1} = v_n + 2v_n = 3v_n$

C'est une **suite géométrique** de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = 2$.
Son terme général est : $v_n = 2 \times 3^n$
Pour alerter 7 milliards de personnes : $v_n \geq 7\,000\,000\,000$

$$\begin{aligned} 2 \times 3^n &\geq 7\,000\,000\,000 \\ 3^n &\geq 3\,500\,000\,000 \end{aligned}$$

Par tâtonnement ou avec une calculatrice :

- $v_{20} = 2 \times 3^{20} = 6\,973\,568\,802 < 7\,000\,000\,000$
- $v_{21} = 2 \times 3^{21} = 20\,920\,706\,406 > 7\,000\,000\,000$

Il faudrait donc seulement **21 jours** !

Conclusion : Même si le communicateur télépathe semble impressionnant avec son million de personnes alertées par jour, la méthode du bouche-à-oreille (méthode 2) est bien plus efficace : 21 jours contre 19 ans ! C'est la puissance de l'évolution géométrique.

Exercice 2 — Solution — Placement

Placement 1 : Rendement de 17% de l'investissement initial

Notons u_n le solde après n années.
Chaque année, on gagne 17% de l'investissement initial, soit $0{,}17 \times 10\,000 = 1\,700$€.

- $u_0 = 10\,000$€
- $u_1 = 10\,000 + 1\,700 = 11\,700$€
- $u_2 = 11\,700 + 1\,700 = 13\,400$€
- Pour tout n, $u_{n+1} = u_n + 1\,700$

C'est une **suite arithmétique** de raison $r = 1\,700$ et de premier terme $u_0 = 10\,000$.
Son terme général est : $u_n = 10\,000 + n \times 1\,700$
Quelques valeurs :

- $u_5 = 10\,000 + 5 \times 1\,700 = 18\,500$€
- $u_{10} = 10\,000 + 10 \times 1\,700 = 27\,000$€
- $u_{20} = 10\,000 + 20 \times 1\,700 = 44\,000$€

Placement 2 : Rendement de 10% du solde courant

Notons v_n le solde après n années.
Chaque année, on gagne 10% du solde actuel. Le nouveau solde est donc $1{,}10$ fois le solde précédent.

- $v_0 = 10\,000$€

- $v_1 = 10\,000 \times 1{,}10 = 11\,000€$
- $v_2 = 11\,000 \times 1{,}10 = 12\,100€$
- Pour tout n, $v_{n+1} = v_n \times 1{,}10$

C'est une **suite géométrique** de raison $q = 1{,}10$ et de premier terme $v_0 = 10\,000$.
Son terme général est : $v_n = 10\,000 \times (1{,}10)^n$
Quelques valeurs :

- $v_5 = 10\,000 \times (1{,}10)^5 \approx 16\,105€$
- $v_{10} = 10\,000 \times (1{,}10)^{10} \approx 25\,937€$
- $v_{20} = 10\,000 \times (1{,}10)^{20} \approx 67\,275€$

Conclusion :

Au début (années 1 à 10), le placement 1 semble plus intéressant car on gagne 1700€ par an contre seulement 10% du solde. Mais à partir d'environ 8 ans, le placement 2 devient plus rentable. Après 20 ans, l'écart est significatif : 67 275€ contre 44 000€, soit une différence de plus de 23 000€ !

Le placement 2 (géométrique) est donc bien plus rentable sur le long terme.

Exercice 3 — Solution — Reconnaître une suite arithmétique

1 Suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -2$.

a. $u_{n+1} = u_n + r = u_n - 2$

b. $u_n = u_0 + n \times r = 5 + n \times (-2) = 5 - 2n$

c. $u_{25} = 5 - 2 \times 25 = 5 - 50 = -45$

2 Étude de la nature des suites :

a. $u_n = 3n - 2$
$u_{n+1} = 3(n+1) - 2 = 3n + 3 - 2 = 3n + 1$
$u_{n+1} - u_n = (3n+1) - (3n-2) = 3$
La suite est **arithmétique** de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = -2$.

b. $v_n = -n + 4$
$v_{n+1} = -(n+1) + 4 = -n - 1 + 4 = -n + 3$
$v_{n+1} - v_n = (-n+3) - (-n+4) = -1$
La suite est **arithmétique** de raison $r = -1$ et de premier terme $v_0 = 4$.

c. $w_n = n^2 + 1$
$w_0 = 1, w_1 = 2, w_2 = 5, w_3 = 10$
$w_1 - w_0 = 1, w_2 - w_1 = 3, w_3 - w_2 = 5$
Les différences ne sont pas constantes. La suite **n'est pas arithmétique**.

d. $a_n = \frac{n^2+n}{n} = \frac{n(n+1)}{n} = n + 1$ (pour $n \geq 1$)
$a_{n+1} = n + 2$
$a_{n+1} - a_n = (n+2) - (n+1) = 1$
La suite est **arithmétique** de raison $r = 1$ et de premier terme $a_1 = 2$.

e. $b_n = \sqrt{n}$
$b_1 = 1, b_4 = 2, b_9 = 3, b_{16} = 4$
$b_4 - b_1 = 1, b_9 - b_4 = 1, b_{16} - b_9 = 1$
Mais $b_2 - b_1 = \sqrt{2} - 1 \neq 1$
La suite **n'est pas arithmétique**.

Exercice 4 — Solution — Reconnaître une suite géométrique

1 Suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 0{,}9$.

a. $u_{n+1} = u_n \times q = 0{,}9 \times u_n$

b. $u_n = u_0 \times q^n = 5 \times (0{,}9)^n$

c. $u_{10} = 5 \times (0{,}9)^{10} \approx 5 \times 0{,}349 \approx 1{,}74$

2 Suite géométrique de raison $q = 2$ et $u_2 = \frac{1}{4}$.

a. $u_{n+1} = 2 \times u_n$

b. On sait que $u_n = u_0 \times q^n = u_0 \times 2^n$
Comme $u_2 = \frac{1}{4}$, on a : $u_0 \times 2^2 = \frac{1}{4}$
Donc $u_0 \times 4 = \frac{1}{4}$, d'où $u_0 = \frac{1}{16}$
Ainsi : $u_n = \frac{1}{16} \times 2^n = \frac{2^n}{16} = \frac{2^n}{2^4} = 2^{n-4}$

c. $u_6 = 2^{6-4} = 2^2 = 4$

3 Étude de la nature des suites :

a. $u_n = 3n - 2$
$u_0 = -2, u_1 = 1, u_2 = 4$
$\frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}, \frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{1} = 4$
Les rapports ne sont pas constants. La suite **n'est pas géométrique**.

b. $v_n = n^2 + 1$
$v_0 = 1, v_1 = 2, v_2 = 5$
$\frac{v_1}{v_0} = 2, \frac{v_2}{v_1} = \frac{5}{2} = 2{,}5$
Les rapports ne sont pas constants. La suite **n'est pas géométrique**.

c. $w_n = 2^{n+1}$
$w_{n+1} = 2^{n+2} = 2 \times 2^{n+1} = 2 \times w_n$
La suite est **géométrique** de raison $q = 2$ et de premier terme $w_0 = 2^1 = 2$.

d. $a_n = \frac{1}{n}$ (pour $n \geq 1$)
$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}$
$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}, \frac{a_3}{a_2} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$
Les rapports ne sont pas constants. La suite **n'est pas géométrique**.

e. $b_n = \frac{1}{3^n} = 3^{-n}$
$b_{n+1} = 3^{-(n+1)} = 3^{-n-1} = 3^{-1} \times 3^{-n} = \frac{1}{3} \times b_n$
La suite est **géométrique** de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $b_0 = 1$.

Exercice 5 — Solution — Campagne publicitaire

1 Agence A

a. 2025 correspond à $n = 2025 - 2019 = 6$
Chaque année, le coût augmente de 750€.
$u_6 = u_0 + 6 \times 750 = 10\,000 + 4\,500 = 14\,500$€
Le coût en 2025 sera de 14 500€.

b. Chaque année, le coût augmente d'une valeur constante de 750€.
On a donc : $u_{n+1} = u_n + 750$
La suite (u_n) est **arithmétique** de raison $r = 750$ et de premier terme $u_0 = 10\,000$.

2 Agence B

a. $v_2 = 2^2 + 200 \times 2 + 10\,000 = 4 + 400 + 10\,000 = 10\,404$€
$v_{10} = 10^2 + 200 \times 10 + 10\,000 = 100 + 2\,000 + 10\,000 = 12\,100$€

b. Vérifions si la suite est arithmétique :
$v_0 = 0 + 0 + 10\,000 = 10\,000$
$v_1 = 1 + 200 + 10\,000 = 10\,201$
$v_2 = 10\,404$
$v_1 - v_0 = 201$ et $v_2 - v_1 = 203$
Les différences ne sont pas constantes, donc la suite **n'est pas arithmétique**.
Vérifions si elle est géométrique :
$\frac{v_1}{v_0} = \frac{10\,201}{10\,000} = 1{,}0201$ et $\frac{v_2}{v_1} = \frac{10\,404}{10\,201} \approx 1{,}0199$
Les rapports ne sont pas constants, donc la suite **n'est pas géométrique**.

c. 2025 correspond à $n = 6$
$v_6 = 6^2 + 200 \times 6 + 10\,000 = 36 + 1\,200 + 10\,000 = 11\,236$€

Exercice 6 — Solution — Suites

1 $u(1) = u(0) + 20 = 200 + 20 = 220$

2 La relation de récurrence $u(n+1) = u(n) + 20$ montre que l'on ajoute à chaque étape une valeur constante de 20.
La suite u est donc **arithmétique** de raison $r = 20$ et de premier terme $u(0) = 200$.

3 $u(2) = u(1) + 20 = 220 + 20 = 240$
On place le point de coordonnées $(2, 240)$ sur le graphique.

4 Analysons chaque situation :

- Situation A : Vente augmente de 10% chaque année.
  Année 0 : 200 unités
  Année 1 : $200 \times 1{,}10 = 220$ unités
  Année 2 : $220 \times 1{,}10 = 242$ unités
  Ce modèle correspond à une suite géométrique, pas à u.
- Situation B : Vente augmente de 20% chaque année.
  Année 0 : 200 unités
  Année 1 : $200 \times 1{,}20 = 240$ unités
  Année 2 : $240 \times 1{,}20 = 288$ unités
  Ce modèle correspond à une suite géométrique, pas à u.
- Situation C : Vente augmente de 20 unités chaque année.
  Année 0 : 200 unités
  Année 1 : $200 + 20 = 220$ unités
  Année 2 : $220 + 20 = 240$ unités
  Ce modèle correspond exactement à la suite u.

Réponse : La situation C peut être modélisée par la suite u, car elle représente une évolution à accroissement constant de 20 unités par an.

Exercice 7 — Solution — Dépréciation d'un véhicule

1 Valeur après 1 an : le véhicule perd 20% de sa valeur, il reste donc 80% de sa valeur.
Après 1 an : $50\,200 \times 0{,}8 = 40\,160$€
Après 3 ans : $50\,200 \times (0{,}8)^3 = 50\,200 \times 0{,}512 = 25\,702{,}4$€

2 Pour tout entier n, u_n est la valeur résiduelle du véhicule l'année « 2006+n ».

a. $u_2 = 50\,200 \times (0{,}8)^2 = 50\,200 \times 0{,}64 = 32\,128$€
Interprétation : En 2008 (2006 + 2), le véhicule vaut 32 128€.

b. Chaque année, le véhicule perd 20% de sa valeur, il conserve donc 80% de sa valeur.
$u_{n+1} = 0{,}8 \times u_n$

c. La suite (u_n) est **géométrique** de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $u_0 = 50\,200$.

d. $u_n = u_0 \times q^n = 50\,200 \times (0{,}8)^n$

3 En 2012 : $n = 2012 - 2006 = 6$
$u_6 = 50\,200 \times (0{,}8)^6 \approx 50\,200 \times 0{,}262 \approx 13\,152$€
En 2050 : $n = 2050 - 2006 = 44$
$u_{44} = 50\,200 \times (0{,}8)^{44} \approx 50\,200 \times 0{,}0001 \approx 5$€

4 Programme Python :

```python
def valeur_vehicule(annee):
    n = annee - 2006
    u_n = 50200 * (0.8)**n
    return u_n

# Pour 2100
print(valeur_vehicule(2100))
```

ou plus simplement :

```python
n = 2100 - 2006
u_n = 50200 * (0.8)**n
print(u_n)
```

Le résultat sera extrêmement proche de 0€ (environ 10^{-9}€).

Exercice 8 — Solution — Rosace

1 À l'étape 0, il y a 3 pétales.
À l'étape 1, on ajoute 1 pétale entre chacun des 3 pétales existants, donc on ajoute 3 pétales.
$u_1 = u_0 + u_0 = 3 + 3 = 6$ pétales
À l'étape 2, on ajoute 1 pétale entre chacun des 6 pétales existants, donc on ajoute 6 pétales.
$u_2 = u_1 + u_1 = 6 + 6 = 12$ pétales

2 À chaque étape, on ajoute autant de pétales qu'il y en avait à l'étape précédente (un pétale entre chaque paire de pétales consécutifs).
Donc : $u_{n+1} = u_n + u_n = 2 \times u_n$

3 La relation $u_{n+1} = 2 \times u_n$ montre que l'on multiplie par 2 à chaque étape.
La suite u est donc **géométrique** de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 3$.
Son terme général est : $u_n = 3 \times 2^n$

Exercice 9 — Solution — Demi-vie

1 À l'injection : $u_0 = 60$ MBq
Après 1 demi-vie : $u_1 = \frac{60}{2} = 30$ MBq
Après 2 demi-vies : $u_2 = \frac{30}{2} = 15$ MBq
Après 3 demi-vies : $u_3 = \frac{15}{2} = 7{,}5$ MBq

2 À chaque demi-vie, l'activité est divisée par 2 :
$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} = 0{,}5 \times u_n$
La suite (u_n) est **géométrique** de raison $q = 0{,}5 = \frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 60$.

3 $u_n = u_0 \times q^n = 60 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{60}{2^n}$

4 $u_5 = 60 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 60 \times \frac{1}{32} = \frac{60}{32} = 1{,}875$ MBq

5 Fonction Python :

```python
def seuil():
    u = 60
    n = 0
    while u >= 0.25:
        u = u / 2
        n = n + 1
    return n
```

On cherche le plus petit n tel que $60 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n < 0{,}25$
Par calculs successifs :

- $u_7 = 60 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 \approx 0{,}469$ MBq
- $u_8 = 60 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 \approx 0{,}234$ MBq

La fonction retourne $n = 8$.

6 Si la demi-vie est de 3 jours, après n demi-vies, il s'est écoulé $3n$ jours.
Comme $n = 8$ demi-vies sont nécessaires, il faut :
$3 \times 8 = 24$ jours
Au bout de 24 jours, l'activité sera inférieure à 0,25 MBq.

Exercice 10 — Solution — Tapis de Sierpiński

1. Nature de la suite

À chaque étape, on découpe le carré central de chaque carré restant. Le carré central représente $\frac{1}{9}$ de la surface de chaque carré.

Donc à chaque étape, on retire $\frac{1}{9}$ de la surface restante, ce qui signifie qu'il reste $\frac{8}{9}$ de la surface précédente.
Ainsi : $u_{n+1} = \frac{8}{9} \times u_n$
La suite (u_n) est donc une **suite géométrique** de raison $q = \frac{8}{9}$ et de premier terme $u_0 = 400$.
Son terme général est : $u_n = 400 \times \left(\frac{8}{9}\right)^n$

2. Comportement de la suite

Puisque $0 < q = \frac{8}{9} < 1$, la suite (u_n) est décroissante et converge vers 0.
On peut conjecturer que : **lorsque n devient aussi grand que l'on veut, u_n se rapproche de 0**.
En d'autres termes : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

3. Fonction seuil

On cherche le plus petit entier n tel que $u_n \leq s$.

```python
def seuil(s):
    u = 400
    n = 0
    while u > s:
        u = u * 8 / 9
        n = n + 1
    return n
```

En programmant cette fonction, on obtient : `seuil(10)` = 33
Cela signifie qu'après 33 découpes, il reste moins de 10 cm^2 de feuille.
Vérification : $u_{33} = 400 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{33} \approx 9{,}88$ cm^2 < 10 cm^2
Et : $u_{32} = 400 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{32} \approx 11{,}11$ cm^2 > 10 cm^2