

Produit Scalaire - projeté orthogonal - Solutions

1G math – novembre 2025

Exercice 1

Solution

Découverte

Le produit scalaire $\vec{F} \cdot \vec{d}$ mesure l'accompagnement de la force par rapport au déplacement.

Forces qui accompagnent le mouvement (produit scalaire positif) :

- $\vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5$ et \vec{F}_7 : ces forces ont une composante dans la direction du mouvement (vers la droite).

Forces qui s'opposent au mouvement (produit scalaire négatif) :

- \vec{F}_6 : cette force est orientée vers la gauche, elle s'oppose au mouvement.

Forces perpendiculaires au mouvement (produit scalaire nul) :

- \vec{F}_1 et \vec{F}_2 : ces forces sont verticales, perpendiculaires au déplacement horizontal.

Classement par efficacité : \vec{F}_7 et \vec{F}_4 (horizontales) sont les plus efficaces, puis \vec{F}_5, \vec{F}_3 , puis \vec{F}_1 et \vec{F}_2 (inefficaces), et enfin \vec{F}_6 (contre-productive).

Exercice 2

Solution

Calculs de produits scalaire

On note H le projeté orthogonal de C sur (AB) . Comme $ABCD$ est un rectangle, $H = B$.

1 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH = 6 \times 6 = 36$

2 $\vec{AB} \cdot \vec{CA} = -\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -36$

3 Le projeté orthogonal de C sur (DB) est B donc $\vec{DB} \cdot \vec{DC} = DB \times DB = 0$ (car B est en dehors de $[DB]$). En fait, on utilise plutôt : $\vec{DB} \cdot \vec{DC} = -DB \times 0 = 0$ car $(DB) \perp (DC)$. Donc $\vec{DB} \cdot \vec{DC} = 0$.

4 Le projeté orthogonal de C sur (AC) est C , donc $\vec{DC} \cdot \vec{AC} = DC \times 0 = 0$ (car $(DC) \perp (AC)$ est faux). Utilisons la formule du cosinus : $\vec{DC} \cdot \vec{AC} = DC \times AC \times \cos(\widehat{DCA})$. On a $DC = 6, AC = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$. Avec le projeté : le projeté de C sur (DC) depuis A est C , donc $\vec{DC} \cdot \vec{AC} = DC \times DC = 6 \times 6 = 36$.

5 O est le milieu de $[AC]$, donc le projeté de O sur (AB) est le milieu de $[AB]$, soit à distance 3 de A . Donc $\vec{AB} \cdot \vec{AO} = AB \times 3 = 6 \times 3 = 18$.

6 $\vec{AB} \cdot \vec{AB} = AB^2 = 36$

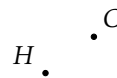
7 $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$ car $(AB) \perp (AD)$

8 $\vec{BC} \cdot \vec{DC} = BC \times DC = 4 \times 6 = 24$ (vecteurs colinéaires de même sens)

Exercice 3

Solution

Mesurer une longueur



1 $A \quad \overset{43}{\cdot} \quad B$

2 Le triangle ABC est rectangle en B , donc les vecteurs \vec{AB} et \vec{BC} sont orthogonaux.

Par le théorème de Pythagore : $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$.

Utilisons la formule du cosinus : $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$.

Donc :

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AC} &= AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= 4 \times 5 \times \frac{4}{5} \\ &= 16\end{aligned}$$

3 Avec la définition du projeté orthogonal :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$$

On a donc $16 = 4 \times AH$, d'où $AH = 4$.

Ainsi, $H = B$ (le projeté de B sur (AC) est en fait B lui-même... ce qui est impossible).

Correction : En réalité, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH = 4 \times AH = 16$, donc $AH = 4$.

On peut vérifier : dans le triangle ABH rectangle en H , on a $\cos(\widehat{BAH}) = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{4}$. Or $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{4}{5}$, donc $\frac{AH}{4} = \frac{4}{5}$, d'où $AH = \frac{16}{5} = 3,2$.

C



2 Dans un triangle équilatéral, tous les angles mesurent 60° . Donc $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

3 a. On utilise la formule du cosinus :

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AC} &= AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= 8 \times 8 \times \cos(60^\circ) \\ &= 64 \times \frac{1}{2} \\ &= 32\end{aligned}$$

b. Dans un triangle équilatéral, la médiane issue de C est aussi la hauteur, donc $(CD) \perp (AB)$.

L'angle \widehat{ACD} peut être calculé. Dans le triangle ACD rectangle en D, on a $\tan(\widehat{ACD}) = \frac{AD}{CD} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, donc $\widehat{ACD} = 30^\circ$.

Ainsi $\widehat{DCA} = 30^\circ$ et $\widehat{ACB} = 60^\circ$, donc $\widehat{DCB} = 30^\circ$ aussi.

L'angle entre \vec{CA} et \vec{CD} est $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

$$\begin{aligned}\vec{CA} \cdot \vec{CD} &= CA \times CD \times \cos(150^\circ) \\ &= 8 \times 4\sqrt{3} \times \cos(150^\circ) \\ &= 32\sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -48\end{aligned}$$

c. D est le milieu de $[AB]$, donc $DA = DB = 4$ et les vecteurs \vec{DA} et \vec{DB} sont opposés. Donc :

$$\begin{aligned}\vec{DA} \cdot \vec{DB} &= -DA \times DB \\ &= -4 \times 4 \\ &= -16\end{aligned}$$

Exercice 5

Solution

Livreur

1 On utilise la formule $W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \|\vec{F}\| \times \|\vec{d}\| \times \cos(\theta)$.

Avec $\|\vec{F}\| = 200$ N, $\|\vec{d}\| = 30$ m et $\theta = 25^\circ$:

$$\begin{aligned}W &= 200 \times 30 \times \cos(25^\circ) \\ &= 6000 \times 0,906 \\ &\approx 5436 \text{ J}\end{aligned}$$

Le travail réalisé est d'environ 5436 joules.

2 Si l'angle était de 0° , alors $\cos(0^\circ) = 1$:

$$\begin{aligned}W &= 200 \times 30 \times 1 \\ &= 6000 \text{ J}\end{aligned}$$

Le travail aurait été de 6000 joules.

Comparaison : Le travail avec un angle de 25° est inférieur au travail avec un angle de 0° . En effet, une partie de la force est "perdue" car elle n'est pas dans la direction du déplacement. Le rapport est $\frac{5436}{6000} \approx 0,906 = \cos(25^\circ)$, ce qui montre que seule la composante de la force dans la direction du déplacement contribue au travail.

On utilise la formule du cosinus : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta)$.

1

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 5 \times 3 \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ &= 15 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -\frac{15\sqrt{2}}{2} \\ &\approx -10,6\end{aligned}$$

Le produit scalaire est négatif car l'angle est obtus.

2

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 4 \times 6 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 24 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -12\end{aligned}$$

Le produit scalaire est négatif car l'angle est obtus ($\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$).

3

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 6 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 24 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 12\sqrt{3} \\ &\approx 20,8\end{aligned}$$

Le produit scalaire est positif car l'angle est aigu ($\frac{\pi}{6} = 30^\circ$).

4

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 8 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 40 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 20\sqrt{2} \\ &\approx 28,3\end{aligned}$$

Le produit scalaire est positif car l'angle est aigu ($\frac{\pi}{4} = 45^\circ$).

5

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 10 \times 3 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 30 \times \frac{1}{2} \\ &= 15\end{aligned}$$

Le produit scalaire est positif car l'angle est aigu ($\frac{\pi}{3} = 60^\circ$).

6

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 7 \times 2 \times \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= 14 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -7\sqrt{3} \\ &\approx -12,1\end{aligned}$$

Le produit scalaire est négatif car l'angle est obtus ($\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$).

On utilise la formule du cosinus : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta)$, d'où $\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$.

1

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{BAC}) &= \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC} \\ &= \frac{15}{5 \times 6} \\ &= \frac{15}{30} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, donc $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ rad.

2

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \\ &= \frac{16\sqrt{3}}{8 \times 4} \\ &= \frac{16\sqrt{3}}{32} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\pi}{6}$ rad.

3

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{EDF}) &= \frac{\vec{DE} \cdot \vec{DF}}{DE \times DF} \\ &= \frac{25\sqrt{2}}{10 \times 5} \\ &= \frac{25\sqrt{2}}{50} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\widehat{EDF} = \frac{\pi}{4}$ rad.

4

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \times \|\vec{b}\|} \\ &= \frac{-27}{6 \times 9} \\ &= \frac{-27}{54} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

On sait que $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, donc $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{2\pi}{3}$ rad.

1 On développe en utilisant la bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \vec{w} \cdot \vec{w} &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

On utilise la propriété du carré scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ et $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$.

Donc :

$$\vec{w} \cdot \vec{w} = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

2 On remplace par les valeurs données :

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{w} &= 3^2 + 2 \times 6 + 4^2 \\ &= 9 + 12 + 16 \\ &= 37\end{aligned}$$

3 On utilise la propriété $\vec{w} \cdot \vec{w} = \|\vec{w}\|^2$:

$$\begin{aligned}\|\vec{w}\|^2 &= 37 \\ \|\vec{w}\| &= \sqrt{37} \\ \|\vec{w}\| &\approx 6,08\end{aligned}$$

Exercice 9

Solution

Démontrer l'orthogonalité

D • I • C

K •

1 A • I • B

2 On utilise la relation de Chasles pour exprimer \vec{KJ} :

$$\vec{KJ} = \vec{KA} + \vec{AB} + \vec{BJ}$$

$$\text{Or } \vec{KA} = -\vec{AK} = -\frac{1}{4}\vec{AD} \text{ et } \vec{BJ} = \vec{BC} + \vec{CJ} = \vec{BC} + \frac{1}{4}\vec{CB} = \vec{BC} - \frac{1}{4}\vec{BC} = \frac{3}{4}\vec{BC}.$$

Donc :

$$\vec{KJ} = -\frac{1}{4}\vec{AD} + \vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{BC}$$

Comme $ABCD$ est un carré, $\vec{BC} = \vec{AD}$, donc :

$$\vec{KJ} = -\frac{1}{4}\vec{AD} + \vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$$

Calcul de $\vec{KJ} \cdot \vec{DA}$:

$$\begin{aligned}\vec{KJ} \cdot \vec{DA} &= (\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}) \cdot \vec{DA} \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{DA} + \frac{1}{2}\vec{AD} \cdot \vec{DA} \\ &= 0 + \frac{1}{2}(-AD^2) \\ &= -\frac{1}{2} \times 36 \\ &= -18\end{aligned}$$

Calcul de $\vec{KJ} \cdot \vec{AI}$:

I est le milieu de $[AB]$, donc $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

$$\begin{aligned}\vec{KJ} \cdot \vec{AI} &= (\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}) \cdot \frac{1}{2}\vec{AB} \\ &= \frac{1}{2}\vec{AB} \cdot \vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD} \cdot \vec{AB} \\ &= \frac{1}{2} \times 36 + 0 \\ &= 18\end{aligned}$$

3 On utilise la relation de Chasles : $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}$.

Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KJ} \cdot \overrightarrow{DI} &= \overrightarrow{KJ} \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}) \\ &= \overrightarrow{KJ} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{KJ} \cdot \overrightarrow{AI} \\ &= -18 + 18 \\ &= 0\end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{KJ} \cdot \overrightarrow{DI} = 0$, les vecteurs \overrightarrow{KJ} et \overrightarrow{DI} sont orthogonaux.

Donc les droites (KJ) et (DI) sont perpendiculaires.

Exercice 10

Solution

Démontrer l'orthogonalité Bis



1 A N B

2 On décompose \overrightarrow{DN} en passant par A :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DN} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} \\ &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \\ &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{DA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

3 On décompose \overrightarrow{AM} en passant par B :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

Comme $ABCD$ est un carré, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{DA}$, donc :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{DA}$$

4 On calcule le produit scalaire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{AM} &= (\overrightarrow{DA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{DA}) \\ &= \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{9}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA}\end{aligned}$$

Dans un carré, $\overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} = 0$.

De plus, $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DA} = DA^2 = l^2$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = l^2$.

Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{AM} &= 0 - \frac{3}{2}l^2 + \frac{3}{2}l^2 - 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$, les vecteurs \overrightarrow{DN} et \overrightarrow{AM} sont orthogonaux.

Donc les droites (DN) et (AM) sont perpendiculaires.

$D \cdot \quad \cdot C$

$\cdot I$

1 $A \quad \overset{ab}{\cdot} \quad \cdot B$

2 On décompose \overrightarrow{AI} : I est le milieu de $[BC]$, donc :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Comme $ABCD$ est un rectangle, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, donc :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

On décompose \overrightarrow{BD} :

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

On calcule le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} &= \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \\ &= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

Dans un rectangle, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

De plus, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = a^2$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = b^2$.

Donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} &= -a^2 + 0 - 0 + \frac{1}{2}b^2 \\ &= \frac{b^2}{2} - a^2 \\ &= \frac{b^2 - 2a^2}{2} \end{aligned}$$

3 (AI) et (DB) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

Donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 &\Leftrightarrow \frac{b^2 - 2a^2}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow b^2 - 2a^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow b^2 = 2a^2 \\ &\Leftrightarrow b = a\sqrt{2} \quad (\text{car } b > 0) \end{aligned}$$

Ainsi, (AI) et (DB) sont perpendiculaires si et seulement si $b = a\sqrt{2}$.

Cela signifie que le rectangle doit avoir un rapport longueur/largeur égal à $\sqrt{2}$, ce qui correspond au format A4 !

1 On utilise la relation de Chasles pour exprimer \overrightarrow{BC} :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

On calcule le carré scalaire $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = BC^2$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = AC^2$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.
Donc :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) + AC^2 \\ BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \end{aligned}$$

2 Applications :

a. On applique la formule d'Al-Kashi :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= 7^2 + 5^2 - 2 \times 7 \times 5 \times \cos(60^\circ) \\ &= 49 + 25 - 70 \times \frac{1}{2} \\ &= 74 - 35 \\ &= 39 \end{aligned}$$

Donc $BC = \sqrt{39} \approx 6,24$.

b. On applique la formule d'Al-Kashi :

$$\begin{aligned} EF^2 &= DE^2 + DF^2 - 2 \times DE \times DF \times \cos(\widehat{EDF}) \\ &= 8^2 + 6^2 - 2 \times 8 \times 6 \times \cos(120^\circ) \\ &= 64 + 36 - 96 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 100 + 48 \\ &= 148 \end{aligned}$$

Donc $EF = \sqrt{148} = 2\sqrt{37} \approx 12,17$.

c. On utilise la formule d'Al-Kashi pour retrouver l'angle :

$$QR^2 = PQ^2 + PR^2 - 2 \times PQ \times PR \times \cos(\widehat{QPR})$$

On isole $\cos(\widehat{QPR})$:

$$\begin{aligned} 15^2 &= 10^2 + 12^2 - 2 \times 10 \times 12 \times \cos(\widehat{QPR}) \\ 225 &= 100 + 144 - 240 \times \cos(\widehat{QPR}) \\ 225 &= 244 - 240 \times \cos(\widehat{QPR}) \\ 240 \times \cos(\widehat{QPR}) &= 244 - 225 \\ 240 \times \cos(\widehat{QPR}) &= 19 \\ \cos(\widehat{QPR}) &= \frac{19}{240} \\ \cos(\widehat{QPR}) &\approx 0,0792 \end{aligned}$$

Donc $\widehat{QPR} \approx 85,5^\circ$ (ou $\approx 1,49$ rad).