Produit scalaire dans un repère - Cours

– janvier 2026

1 Propriétés du produit scalaire

Propriété: Bilinéarité et symétrie

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et k un nombre réel.

- **Symétrie :** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- **Linéarité à droite :**
  - $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
  - $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$
- **Linéarité à gauche** (par symétrie) :
  - $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$
  - $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Exemples: Développer

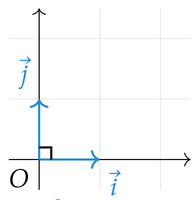
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) =$
- $(\vec{u}+\vec{v})^2 =$

2 Expression en base orthonormée

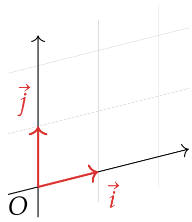
Définition: Base orthonormée

Une base $(O;\vec{i},\vec{j})$ est dites **orthonormée** si et seulement si

- $\vec{i}.\vec{j} = 0$ (les axes sont perpendiculaires)
- $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 1$ (les unités sont identiques)



Orthonormé



Non orthonormé

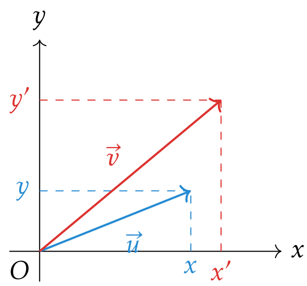
Propriété: Produit scalaire en coordonnées

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, soient deux vecteurs :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'}$$



Démonstration

Exercice 4 du plan de travail

Exemples

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$