Produit scalaire dans un repère - Solutions

1G math – janvier 2026

Attention – Document généré par IA

Ce document a été essentiellement généré par une intelligence artificielle (LLM) et relu dans les grandes lignes. Des erreurs, des approximations ou des méthodes inhabituelles peuvent être présentes.

Restez critique face au contenu proposé et ne le considérez pas comme une vérité absolue.

Exercice 1 — Solution — Calculs directs

Dans un repère orthonormé, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est donné par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-1) + 2 \times 4 = -3 + 8 = 5$
2. $\vec{u} \cdot \vec{w} = 3 \times 5 + 2 \times (-2) = 15 - 4 = 11$
3. $\vec{v} \cdot \vec{w} = (-1) \times 5 + 4 \times (-2) = -5 - 8 = -13$
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} = 3 \times 3 + 2 \times 2 = 9 + 4 = 13$

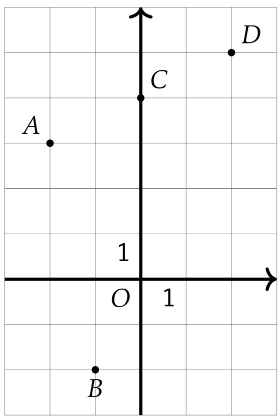
Exercice 2 — Solution — PS avec des coordonnées

1. $\vec{u}.\vec{v} = 2 \times (-3) + 1 \times (-1) = -6 - 1 = -7$
2. $\vec{v}.\vec{w} = (-3) \times 1 + (-1) \times 4 = -3 - 4 = -7$
3. On calcule d'abord $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} -3+1 \\ -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

   Donc $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = 2 \times (-2) + 1 \times 3 = -4 + 3 = -1$
4. On utilise la bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}(-2\vec{u}).\vec{v} + 3(\vec{v}.\vec{w}) &= -2(\vec{u}.\vec{v}) + 3(\vec{v}.\vec{w}) \\ &= -2 \times (-7) + 3 \times (-7) \\ &= 14 - 21 = -7\end{aligned}$$

Exercice 3 — Solution — Avec des points



On calcule d'abord les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-(-2) \\ -2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0-(-2) \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} -1-0 \\ -2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 2-(-1) \\ 5-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2-0 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -2-(-1) \\ 3-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1 \times 2 + (-5) \times 1 = 2 - 5 = -3$
2. $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BD} = (-1) \times 3 + (-6) \times 7 = -3 - 42 = -45$
3. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 1 \times 2 + (-5) \times 1 = 2 - 5 = -3$
4. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} = (-1) \times 4 + 5 \times 2 = -4 + 10 = 6$

Exercice 4 — Solution — Démonstration de la formule

1 On utilise la bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v} &= (x\vec{i}+y\vec{j}).(x'\vec{i}+y'\vec{j})\\ &= x\vec{i}.(x'\vec{i}+y'\vec{j})+y\vec{j}.(x'\vec{i}+y'\vec{j})\\ &= xx'\vec{i}.\vec{i}+xy'\vec{i}.\vec{j}+yx'\vec{j}.\vec{i}+yy'\vec{j}.\vec{j}\end{aligned}$$

2 Le repère est orthonormé, donc :

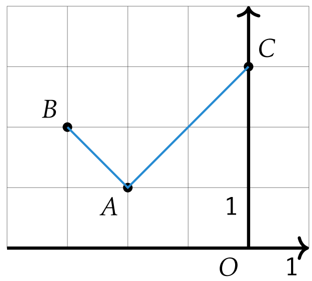
- $\vec{i}.\vec{i} = ||\vec{i}||^2 = 1^2 = 1$
- $\vec{j}.\vec{j} = ||\vec{j}||^2 = 1^2 = 1$
- $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{i} = 0$ (car $\vec{i} \perp \vec{j}$)

Ainsi :

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v} &= xx'\times 1 + xy'\times 0 + yx'\times 0 + yy'\times 1\\ &= xx'+yy'\end{aligned}$$

On obtient donc la formule : $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'}$

Exercice 5 — Solution — Droites perpendiculaires



Calculons les coordonnées des vecteurs :

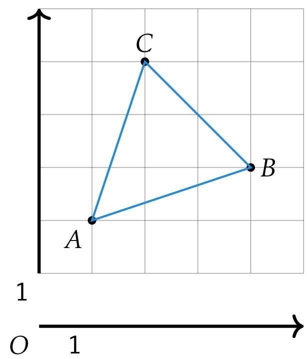
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3-(-2) \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0-(-2) \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculons le produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-1)\times 2 + 1\times 2 = -2+2 = 0$$

Puisque $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
Par conséquent, les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Exercice 6 — Solution — Triangle rectangle



Pour qu'un triangle soit rectangle, il faut que deux de ses côtés soient perpendiculaires. Calculons les coordonnées des vecteurs :

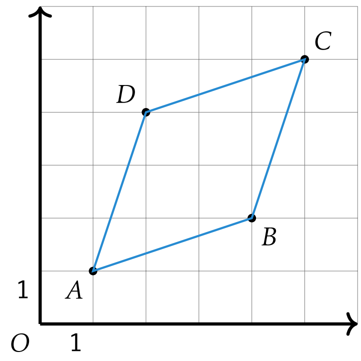
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Testons l'orthogonalité :

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3\times 1 + 1\times 3 = 3+3 = 6 \neq 0$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 3\times(-2) + 1\times 2 = -6+2 = -4 \neq 0$
- $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 1\times(-2) + 3\times 2 = -2+6 = 4 \neq 0$

Aucun produit scalaire n'est nul, donc le triangle ABC n'est pas rectangle.

Exercice 7 — Solution — Parallélogramme et losange



1 Calculons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

2 Un parallélogramme est un losange si ses diagonales sont perpendiculaires. Calculons les vecteurs des diagonales :

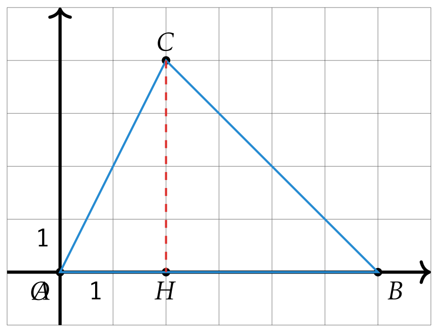
$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculons leur produit scalaire :

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 4 \times (-2) + 4 \times 2 = -8 + 8 = 0$$

Les diagonales sont perpendiculaires, donc $ABCD$ est un losange.

Exercice 8 — Solution — Hauteur dans un triangle



Pour que (CH) soit la hauteur issue de C, il faut que :

- H appartienne à (AB)
- $(CH) \perp (AB)$

Les points A, B et H ont tous une ordonnée nulle, donc ils sont alignés sur l'axe des abscisses. Ainsi $H \in (AB)$.
Calculons les vecteurs :

$$\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculons leur produit scalaire :

$$\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0 \times 6 + (-4) \times 0 = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux, donc $(CH) \perp (AB)$.
Par conséquent, (CH) est bien la hauteur du triangle ABC issue de C.

Exercice 9 — Solution — Trouver un vecteur orthogonal

1 Pour que $\vec{v}$ soit orthogonal à $\vec{u}$, il faut que $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
Cela donne : $3x + (-2)y = 0$, soit $3x - 2y = 0$.
On peut choisir $x = 2$, ce qui donne $6 - 2y = 0$, donc $y = 3$.

Un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ est donc $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2 L'équation $3x - 2y = 0$ admet une infinité de solutions. On peut choisir :

- $\vec{v_1}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (trouvé précédemment)

- $\vec{v_2}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ (en prenant $x = 4$)
- $\vec{v_3}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ (en prenant $x = -2$)

Remarque : On peut aussi remarquer que si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors $\vec{v}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ ou $\vec{v}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ sont orthogonaux à $\vec{u}$.

Exercice 10 — Solution — Angle entre deux vecteurs

On utilise la formule : $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||}$

1 $\vec{u}.\vec{v} = 0 \times 2 + 1 \times 2 = 2$

$||\vec{u}|| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ et $||\vec{v}|| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{2}{1 \times 2\sqrt{2}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ainsi $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{4}$

2 $\vec{u}.\vec{v} = 1 \times 2 + \sqrt{3} \times 0 = 2$

$||\vec{u}|| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ et $||\vec{v}|| = 2$

Donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{2}{2 \times 2} = \dfrac{1}{2}$

Ainsi $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{3}$

3 $\vec{u}.\vec{v} = 3 \times (-\sqrt{3}) + \sqrt{3} \times 1 = -3\sqrt{3} + \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$

$||\vec{u}|| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ et $||\vec{v}|| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

Donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times 2} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2}$

Ainsi $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{2\pi}{3}$

Exercice 11 — Solution — Angle avec des points

L'angle $\widehat{ABC}$ est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

1 $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 2 \times 4 + 2 \times (-4) = 8 - 8 = 0$

Le produit scalaire est nul, donc $\widehat{ABC} = \dfrac{\pi}{2}$

2 $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 2\sqrt{3} \times 0 + 2 \times 1 = 2$

$||\overrightarrow{BA}|| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$ et $||\overrightarrow{BC}|| = 1$

Donc $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{2}{4 \times 1} = \dfrac{1}{2}$

Ainsi $\widehat{ABC} = \dfrac{\pi}{3}$

3 $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 3 \times 2 + 3\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 6 + 18 = 24$

$||\overrightarrow{BA}|| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 27} = 6$ et $||\overrightarrow{BC}|| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$

Donc $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{24}{6 \times 4} = \dfrac{24}{24} = 1$

Ainsi $\widehat{ABC} = 0$ (les points sont alignés)

Exercice 12 — Solution — Recherche d'un point

Puisque M est sur l'axe des ordonnées, ses coordonnées sont de la forme $M(0;y)$.

Pour que $\widehat{ABM} = \frac{\pi}{2}$, il faut que $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BM}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BM} = 0$.

Calculons les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+2-2 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} 0-2 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ y \end{pmatrix}$$

Le produit scalaire donne :

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BM} = \sqrt{3} \times (-2) + 1 \times y = -2\sqrt{3} + y$$

Pour que $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BM} = 0$:

$$-2\sqrt{3} + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2\sqrt{3}$$

Les coordonnées du point M sont donc $M(0;2\sqrt{3})$.

Exercice 13 — Solution — Quelle méthode choisir ?

1 Méthode : formule avec les coordonnées

Les coordonnées des vecteurs sont données dans un repère orthonormé.

$$\vec{u}.\vec{v} = 2 \times (-1) + 3 \times 4 = -2 + 12 = 10$$

2 Méthode : formule avec l'angle

On connaît les normes et l'angle entre les vecteurs.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 5 \times 3 \times \cos(60°) = 15 \times \frac{1}{2} = 7{,}5$$

3 Méthode : projection orthogonale

H est le projeté orthogonal de B sur (AC).

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC} = AH \times AC = 0{,}7 \times 2 = 1{,}4$$

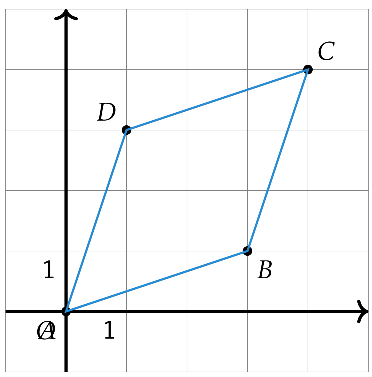
4 Méthode : formule de polarisation

On utilise la relation $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ dans le parallélogramme.

$$\begin{aligned} AC^2 &= ||\overrightarrow{AC}||^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} \\ &= AB^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + AD^2 \end{aligned}$$

Donc : $6^2 = 4^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + 3^2$
$36 = 16 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + 9$
$2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 36 - 25 = 11$
Ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 5{,}5$

Exercice 14 — Solution — Quadrilatère



1 Calculons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

2 **Rectangle ?** Un parallélogramme est un rectangle si ses côtés consécutifs sont perpendiculaires.
Calculons $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et vérifions si $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 3 \times 1 + 1 \times 3 = 3 + 3 = 6 \neq 0$$

Les côtés ne sont pas perpendiculaires, donc $ABCD$ n'est pas un rectangle.
Losange ? Un parallélogramme est un losange si ses diagonales sont perpendiculaires.
Calculons les vecteurs des diagonales :

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$$

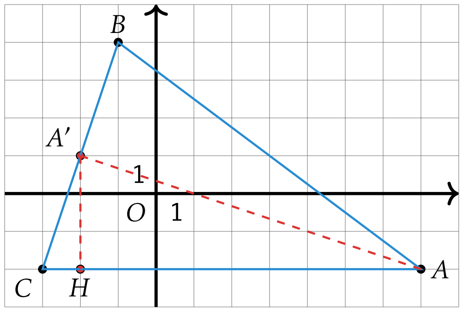
Vérifions leur orthogonalité :

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 4 \times (-2) + 4 \times 2 = -8 + 8 = 0$$

Les diagonales sont perpendiculaires, donc $ABCD$ est un losange.
Carré ? Un quadrilatère est un carré s'il est à la fois rectangle et losange. Comme $ABCD$ n'est pas un rectangle, ce n'est pas un carré.
Conclusion : $ABCD$ est un losange mais pas un rectangle ni un carré.

Exercice 15 — Solution — Problème de géométrie analytique

1



2 Calculons les distances AB et AC :

$$AB = \sqrt{(-1-7)^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$
$$AC = \sqrt{(-3-7)^2 + (-2-(-2))^2} = \sqrt{100+0} = \sqrt{100} = 10$$

On a $AB = AC = 10$, donc le triangle ABC est isocèle en A.

3 Les coordonnées de A', milieu de $[BC]$, sont :

$$A'\left(\frac{-1+(-3)}{2}; \frac{4+(-2)}{2}\right) = A'(-2;1)$$

Calculons les vecteurs :

$$\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}-9\\3\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-10\\0\end{pmatrix}$$

Le produit scalaire est :

$$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AC} = (-9) \times (-10) + 3 \times 0 = 90$$

4 Puisque H est le projeté orthogonal de A' sur (AC), on a :

$$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC} = AH \times AC$$

Donc : $90 = AH \times 10$, d'où $AH = 9$
Le point H est sur la droite (AC). Comme $C(-3;-2)$ et $A(7;-2)$ ont la même ordonnée, la droite (AC) est horizontale d'équation $y = -2$.
Donc H a pour ordonnée -2. De plus, $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-10\\0\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x_H-7\\0\end{pmatrix}$.
On a $AH = |x_H - 7| = 9$, donc $x_H - 7 = -9$ ou $x_H - 7 = 9$.
Comme H est entre A et C (car A' est entre B et C), on a $x_H = -2$.
Ainsi $H(-2;-2)$.

5 Les coordonnées de I, milieu de $[A'H]$, sont :

$$I\left(\frac{-2+(-2)}{2}; \frac{1+(-2)}{2}\right) = I\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$$

Calculons les vecteurs :

$$\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-9\\3/2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\-6\end{pmatrix}$$

Calculons leur produit scalaire :

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BH} = (-9) \times (-1) + \frac{3}{2} \times (-6) = 9 - 9 = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont orthogonaux, donc les droites (AI) et (BH) sont perpendiculaires.