Polynomes de degré 2 - Plan de travail

1G math – janvier 2026

1 Mise en place

- ☐ Exercice 1: Boite sans couvercle ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 2: Disjonction de cas ☆☆☆☆☆

2 Racine et tableau de signes

- ☐ Exercice 3: Résolution d'équation de degré 2 ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 4: Factorisation ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 5: Tableau de signes des polynômes ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 6: Résolution d'inéquation de degré 2 ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 7: Peinture ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 8: Balançoires ☆☆☆☆☆

3 Recherche de racines

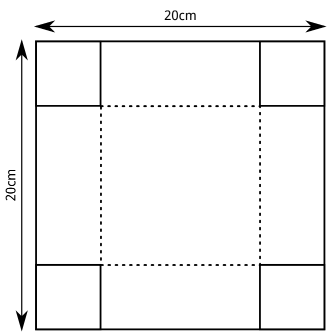
- ☐ Exercice 9: Vérifications ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 10: Relation entre racines ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 11: Automatisation ☆☆☆☆☆

4 Variations de polynômes de degré 3

- ☐ Exercice 12: Producteur de carottes ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 13: Producteur de carottes ☆☆☆☆☆

Exercice 1 — Boite sans couvercle

On dispose d'une feuille cartonnée pour construire des boites sans couvercle.



Où doit-on plier les bords pour avoir une boite la plus grande possible?

Exercice 2 — Disjonction de cas

Dans cet exercice, on cherche trouver des liens entre les coefficients des polynômes et leur tableau de signes. Pour cela, on se donne les fonctions polynômes suivantes

$g(x) = x^2 - 4x + 3$	$k(x) = x^2 - 2x - 3$	$o(x) = -x^2 + 2x + 3$
$h(x) = x^2 + 2x + 5$	$l(x) = 3x^2 + 6x + 5$	$p(x) = -x^2 - 6x - 9$
$i(x) = 2x^2 - 8x + 8$	$m(x) = -x^2 + 4x - 5$	$q(x) = -x^2 + 6x - 9$
$j(x) = x^2 + 6x + 9$	$n(x) = -2x^2 - 4x - 2$	$r(x) = -2x^2 + 4x - 5$

1 En calculant les valeurs de β ranger les fonctions dans le tableau suivant

	$a > 0$	$a < 0$
$\beta < 0$		
$\beta = 0$		
$\beta > 0$		

2 Reproduire le tableau précédent et tracer l'allure des graphiques des fonctions.

3 On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ que l'on nomme le discriminant du polynômes. Ranger les polynômes dans le tableau suivant en fonction de la valeur de a et de Δ

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a < 0$			
$a > 0$			

4 Tracer les 3 tableaux de signes possibles pour un polynôme de degré 2 en fonction de la valeur de Δ.

Exercice 3 — Résolution d'équation de degré 2

Résoudre les équations suivantes (*Essayez de ne pas utiliser Δ quand c'est possible*)

1 $x^2 - 2x - 3 = 0$
2 $x^2 = x + 1$
3 $x^2 = 4$
4 $2x^2 + 5 = 7$
5 $2x(x + 1) = x^2 + 3x$
6 $(3x + 1)^2 = (3 - x)^2$

Exercice 4 — Factorisation

Pour les fonctions suivantes, calculer Δ et quand c'est possible, calculer les racines et proposer une forme factorisée.

1 $f(x) = x^2 - 5x + 6$
2 $m(x) = x^2 + x + 1$
3 $h(x) = x^2 - 4x + 4$
4 $k(x) = -3x^2 + 6x - 3$
5 $g(x) = 2x^2 + 3x - 2$
6 $n(x) = 2x^2 - x + 3$

Exercice 5 — Tableau de signes des polynômes

Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe des fonctions suivantes

1 $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$
2 $g(x) = -4x^2 + 2x - 7$
3 $h(x) = \frac{4}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}$

Exercice 6 — Résolution d'inéquation de degré 2

Résoudre les inéquations suivantes

1 $5x^2 + 15x + 10 < 0$
2 $2x^2 - 8x + 8 \leq 0$
3 $2x^2 - 5x + 10 \geq 0$

Exercice 7 — Peinture

Une entreprise peut produire quotidiennement entre 1 et 20 tonnes de peinture.

Le coût de production, en millier d'euros, de x tonnes de peinture est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[1; 20]$ par $C(x) = 0,05x^2 - 0,1x + 2,45$. Le prix de vente d'une tonne de peinture est de 670 €. Toute la production est vendue.

1 Pour x tonnes de peinture produites, déterminer l'expression du bénéfice $B(x)$ réalisé.

2 Déterminer les quantités produites qui permettent de réaliser un bénéfice positif.

Exercice 8 — Balançoires

Une entreprise produit entre 0 et 50 balançoires par jour.

Le coût de fabrication de x balançoires, en euros, est donné par la fonction suivante : $f(x) = x^2 + 230x + 325$.

Chaque balançoire est vendue 300 €, et toute la production est vendue.

1. Exprimer le bénéfice $B(x)$ réalisé par l'entreprise en fonction de x.
2. Combien de balançoires l'entreprise doit-elle produire et vendre pour être rentable ?

Exercice 9 — Vérifications

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 - 8x - 10$.

1. Vérifier que -1 et 5 sont les racines de f.
2. En déduire la forme factorisée de f.

Exercice 10 — Relation entre racines

1. Déterminer une racine évidente de la fonction polynôme du second degré $f : x \mapsto x^2 + 5x - 6$. En déduire une autre racine à l'aide des propriétés des racines puis factoriser $f(x)$.
2. Déterminer une racine évidente de la fonction polynôme du second degré $g : x \mapsto -2x^2 + 5x + 18$. En déduire une autre racine à l'aide des propriétés des racines puis factoriser $g(x)$.

Exercice 11 — Automatisation

Dans cet exercice, on souhaite compléter les programmes python pour automatiser la réponse à certaines questions.

1. On souhaite écrire un programme qui dit si oui ou non une valeur donnée est une racine d'un polynômes
   a. Compléter le code de la fonction `est_racine`
   b. Que retourne l'appel de la fonction `est_racine(1, 0, -1, 1)`?
2. On souhaite écrire un programme qui renvoie les racines d'un polynôme de degré 2
   a. Compléter le code de la fonction `racine_trinome`
   b. Que retourne l'appel à la fonction `racine_trinome(1, -5, 6)`?

```python
def est_racine(a, b, c, x):
   image = ...
   if ...:
      return "C'est une racine"
   else:
      return "Ce n'est pas une racine"
```

```python
from math import sqrt

def racines_trinome(a, b, c):
   delta = ...
   if delta > 0:
      x1 = ...
      x2 = ...
      return (x1, x2)
   elif delta == 0:
      x = ...
      return (x,)
   else:
      return ()
```

Exercice 12 — Producteur de carottes

Une entreprise fabrique chaque jour des rouleaux de tissu en coton. La production quotidienne varie entre 1 et 10 kilomètres de tissu. On note x la production de tissu en kilomètres.

Le coût total de production, exprimé en euros, de x kilomètres de tissu est donné par la fonction C définie pour x appartenant à $[1 ; 10]$ par :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750.$$

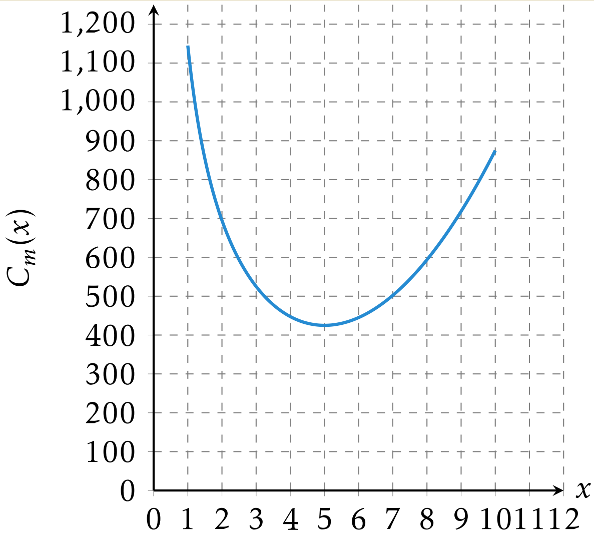
Partie A : lectures graphiques

On appelle coût moyen de production la fonction C_m définie sur l'intervalle $[1\,;10]$ par: $C_m = \dfrac{C(x)}{x}$.
La représentation graphique de la fonction C_m est donnée ci-dessous.

1 Donner par lecture graphique une valeur approchée de $C_m(7)$.

2 À l'aide de la représentation graphique, donner le tableau de variations de C_m sur $[1\,;10]$.

3 Déterminer par lecture graphique combien de kilomètres de tissu l'entreprise doit fabriquer pour que le coût moyen de production soit minimal.



Partie B : étude du bénéfice

On suppose que l'entreprise vend chaque jour sa production journalière.
Le prix de vente d'un kilomètre de tissu est de 680 €.
On rappelle que le nombre de kilomètres de tissu x fabriqués varie chaque jour entre 1 et 10.
On note $R(x)$ la recette, exprimée en euros, correspondant à la vente de x kilomètres de tissu.
On note $B(x)$ le bénéfice, exprimé en euros, réalisé par l'entreprise pour la vente de x kilomètres de tissu.

1 a. Combien est vendu 5 kilomètres de tissu?
b. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.

2 Justifier que l'expression de $B(x)$ en fonction de x est: $B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$.

3 On note B' la fonction dérivée de la fonction B. Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1\,;10]$, calculer $B'(x)$.

4 a. Démontrer que $x = 6$ et $x = \frac{-2}{3}$ sont des racines de $B'(x)$.
b. Factoriser l'expression de $B'(x)$.
c. En déduire le signe de la fonction B' sur l'intervalle $[1\,;10]$.

5 En utilisant la question précédente, donner le tableau de variations complet de la fonction B sur l'intervalle $[1\,;10]$.

6 Déterminer le nombre de kilomètres de tissu que l'entreprise doit produire et vendre chaque jour pour que le bénéfice réalisé soit maximal. Que vaut ce bénéfice maximal ?

Exercice 13 — Producteur de carottes

Une entreprise produit et vend des carottes. Elle a la capacité de produire entre 0 et 16 tonnes.
Le coût de production, en euro, de x tonnes est modélisé par la fonction

$$C(x) = x^3 - 15x^2 + 78x - 650$$

Chaque tonne de carottes est vendue 150€.

1 **Production de 3 tonnes de carottes**
a. Déterminer le coût de production de 3 tonnes de carottes.
b. Déterminer les revenus de la vente de 3 tonnes.
c. En déduire les bénéfices. L'entreprise réalise-t-elle des bénéfices?

2 **Étude des bénéfices**
a. Déterminer l'expression des revenus $R(x)$ pour x tonnes de carottes vendues.
b. En déduire que les bénéfices peuvent être modélisés par la fonction

$$B(x) = -x^3 + 15x^2 + 72x + 650$$

c. Calculer $B'(x)$
d. Étudier le signe de $B'(x)$
e. En déduire les variations de $B(x)$ pour x variant entre 0 et 16.
f. Quelles quantité de carottes doivent être vendues pour avoir un bénéfice maximal? Quel est alors ce bénéfice?