Polynomes de degré 2 - Solutions

1G math – janvier 2026

Exercice 1 — Solution — Boite sans couvercle

Notons x la longueur du côté des carrés découpés aux coins.

Les dimensions de la boîte sont alors :

- Longueur : $20 - 2x$
- Largeur : $10 - 2x$
- Hauteur : x

Le volume de la boîte est donc $V(x) = x(20-2x)(10-2x) = x(200-40x-20x+4x^2) = 4x^3 - 60x^2 + 200x$.

Pour maximiser le volume, on calcule la dérivée :

$$V'(x) = 12x^2 - 120x + 200$$

On cherche les racines de $V'(x)$:

$$\Delta = 120^2 - 4 \times 12 \times 200 = 14400 - 9600 = 4800$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4800} = 40\sqrt{3} \approx 69,3$$

Les racines sont :

$$x_1 = \frac{120 - 40\sqrt{3}}{24} = 5 - \frac{5\sqrt{3}}{3} \approx 2,11$$

$$x_2 = \frac{120 + 40\sqrt{3}}{24} = 5 + \frac{5\sqrt{3}}{3} \approx 7,89$$

Comme x doit vérifier $0 < x < 5$ (pour que les dimensions soient positives), seule la valeur $x \approx 2,11$ cm convient.

Il faut donc plier les bords à environ $2,1$ cm des coins pour obtenir le volume maximal.

Exercice 2 — Solution — Disjonction de cas

1 Calcul de β pour chaque fonction (rappel : $\beta = f(\alpha)$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$) :

- $\alpha_1(x) = x^2 - 4x + 3 : \alpha = 2, \beta = 4 - 8 + 3 = -1 < 0, a = 1 > 0$
- $\alpha_2(x) = x^2 + 2x + 5 : \alpha = -1, \beta = 1 - 2 + 5 = 4 > 0, a = 1 > 0$
- $\alpha_3(x) = 2x^2 - 8x + 8 : \alpha = 2, \beta = 8 - 16 + 8 = 0, a = 2 > 0$
- $\alpha_4(x) = x^2 + 6x + 9 : \alpha = -3, \beta = 9 - 18 + 9 = 0, a = 1 > 0$
- $\alpha_5(x) = x^2 - 2x - 3 : \alpha = 1, \beta = 1 - 2 - 3 = -4 < 0, a = 1 > 0$
- $\alpha_6(x) = 3x^2 + 6x + 5 : \alpha = -1, \beta = 3 - 6 + 5 = 2 > 0, a = 3 > 0$
- $\alpha_7(x) = -x^2 + 4x - 5 : \alpha = 2, \beta = -4 + 8 - 5 = -1 < 0, a = -1 < 0$
- $\alpha_8(x) = -2x^2 - 4x - 2 : \alpha = -1, \beta = -2 + 4 - 2 = 0, a = -2 < 0$
- $\alpha_9(x) = -x^2 + 2x + 3 : \alpha = 1, \beta = -1 + 2 + 3 = 4 > 0, a = -1 < 0$
- $\alpha_{10}(x) = -x^2 - 6x - 9 : \alpha = -3, \beta = -9 + 18 - 9 = 0, a = -1 < 0$
- $\alpha_{11}(x) = -x^2 + 6x - 9 : \alpha = 3, \beta = -9 + 18 - 9 = 0, a = -1 < 0$
- $\alpha_{12}(x) = -2x^2 + 4x - 5 : \alpha = 1, \beta = -2 + 4 - 5 = -3 < 0, a = -2 < 0$

Tableau complété :

	$a > 0$	$a < 0$
$\beta < 0$	α_1, α_5	α_7, α_{12}
$\beta = 0$	α_3, α_4	$\alpha_8, \alpha_{10}, \alpha_{11}$
$\beta > 0$	α_2, α_6	α_9

2 Les graphiques montrent que :

- Si $a > 0$ et $\beta < 0$: parabole vers le haut, sommet en-dessous de l'axe → 2 racines
- Si $a > 0$ et $\beta = 0$: parabole vers le haut, sommet sur l'axe → 1 racine double
- Si $a > 0$ et $\beta > 0$: parabole vers le haut, sommet au-dessus de l'axe → 0 racine
- Si $a < 0$ et $\beta < 0$: parabole vers le bas, sommet en-dessous de l'axe → 0 racine
- Si $a < 0$ et $\beta = 0$: parabole vers le bas, sommet sur l'axe → 1 racine double
- Si $a < 0$ et $\beta > 0$: parabole vers le bas, sommet au-dessus de l'axe → 2 racines

3 Calcul de Δ pour chaque fonction :

- $\alpha_1 : \Delta = 16 - 12 = 4 > 0$
- $\alpha_2 : \Delta = 4 - 20 = -16 < 0$

- $\alpha_3 : \Delta = 64 - 64 = 0$
- $\alpha_4 : \Delta = 36 - 36 = 0$
- $\alpha_5 : \Delta = 4 + 12 = 16 > 0$
- $\alpha_6 : \Delta = 36 - 60 = -24 < 0$
- $\alpha_7 : \Delta = 16 - 20 = -4 < 0$
- $\alpha_8 : \Delta = 16 - 16 = 0$
- $\alpha_9 : \Delta = 4 + 12 = 16 > 0$
- $\alpha_{10} : \Delta = 36 - 36 = 0$
- $\alpha_{11} : \Delta = 36 - 36 = 0$
- $\alpha_{12} : \Delta = 16 - 40 = -24 < 0$

Tableau complété :

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a < 0$	α_7, α_{12}	$\alpha_8, \alpha_{10}, \alpha_{11}$	α_9
$a > 0$	α_2, α_6	α_3, α_4	α_1, α_5

Observation importante : On constate que $\beta < 0 \Leftrightarrow \Delta > 0$ pour $a > 0$, et $\beta > 0 \Leftrightarrow \Delta > 0$ pour $a < 0$.

4 Les 3 tableaux de signes possibles :

- **Si** $\Delta < 0$: Le polynôme ne s'annule jamais, il garde le signe de a.
- **Si** $\Delta = 0$: Le polynôme s'annule en une seule valeur $x_0 = -\frac{b}{2a}$, il garde le signe de a partout sauf en x_0.
- **Si** $\Delta > 0$: Le polynôme s'annule en deux valeurs x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$). Il a le signe de a à l'extérieur de $[x_1 ; x_2]$ et le signe de $-a$ entre x_1 et x_2.

Exercice 3 — Solution — Résolution d'équation de degré 2

1 $x^2 - 2x - 3 = 0$
$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$, donc $\sqrt{\Delta} = 4$.
$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$.
$S = \{-1; 3\}$.

2 $x^2 = x + 1 \iff x^2 - x - 1 = 0$
$\Delta = 1 + 4 = 5$, donc $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
$S = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

3 $x^2 = 4 \iff x^2 - 4 = 0 \iff (x-2)(x+2) = 0$
$S = \{-2; 2\}$.

4 $2x^2 + 5 = 7 \iff 2x^2 = 2 \iff x^2 = 1$
$S = \{-1; 1\}$.

5 $2x(x+1) = x^2 + 3x \iff 2x^2 + 2x = x^2 + 3x \iff x^2 - x = 0 \iff x(x-1) = 0$
$S = \{0; 1\}$.

6 $(3x+1)^2 = (3-x)^2 \iff (3x+1)^2 - (3-x)^2 = 0$
$(3x + 1 - 3 + x)(3x + 1 + 3 - x) = 0 \iff (4x-2)(2x+4) = 0$
$S = \left\{\frac{1}{2}; -2\right\}$.

Exercice 4 — Solution — Factorisation

1 $f(x) = x^2 - 5x + 6$
$\Delta = 25 - 24 = 1$, donc $\sqrt{\Delta} = 1$.
$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$.
Forme factorisée : $f(x) = (x-2)(x-3)$.

2 $m(x) = x^2 + x + 1$
$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$.
Pas de racines réelles, donc pas de forme factorisée dans $\mathbb{R}$.

3 $h(x) = x^2 - 4x + 4$
$\Delta = 16 - 16 = 0$.
$x_0 = \frac{4}{2} = 2$ (racine double).
Forme factorisée : $h(x) = (x-2)^2$.

4 $k(x) = -3x^2 + 6x - 3$
$\Delta = 36 - 36 = 0$.
$x_0 = \frac{-6}{-6} = 1$ (racine double).
Forme factorisée : $k(x) = -3(x-1)^2$.

5 $g(x) = 2x^2 + 3x - 2$
$\Delta = 9 + 16 = 25$, donc $\sqrt{\Delta} = 5$.
$x_1 = \frac{-3-5}{4} = -2$ et $x_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$.
Forme factorisée : $g(x) = 2(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x+2)(2x-1)$.

6 $n(x) = 2x^2 - x + 3$
$\Delta = 1 - 24 = -23 < 0$.
Pas de racines réelles, donc pas de forme factorisée dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5 — Solution — Tableau de signes des polynômes

1 $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$
$\Delta = 9 + 16 = 25$, donc $\sqrt{\Delta} = 5$.
$x_1 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{3+5}{4} = 2$.
Comme $a = 2 > 0$, le tableau de signes est :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2 $g(x) = -4x^2 + 2x - 7$
$\Delta = 4 - 112 = -108 < 0$.
Comme $a = -4 < 0$ et $\Delta < 0$, $g(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	

3 $h(x) = \frac{4}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}$
$\Delta = \frac{4}{9} - 4 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{4}{9} - \frac{4}{9} = 0$.
$x_0 = \frac{\frac{2}{3}}{2\times\frac{4}{9}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{8} = \frac{3}{4}$.
Comme $a = \frac{4}{9} > 0$, $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h(x) = 0$ ssi $x = \frac{3}{4}$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$+$	

Exercice 6 — Solution — Résolution d'inéquation de degré 2

1 $5x^2 + 15x + 10 < 0$
On factorise : $5(x^2 + 3x + 2) < 0 \iff x^2 + 3x + 2 < 0$.
$\Delta = 9 - 8 = 1$, donc $x_1 = \frac{-3-1}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-3+1}{2} = -1$.
Comme $a = 1 > 0$, le polynôme est négatif entre les racines.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
x^2+3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-2;-1[$.

2 $2x^2 - 8x + 8 \leq 0$
On factorise : $2(x^2 - 4x + 4) \leq 0 \iff x^2 - 4x + 4 \leq 0$.
$\Delta = 16 - 16 = 0$, donc $x_0 = 2$ (racine double).
$(x-2)^2 \leq 0$. Or $(x-2)^2 \geq 0$ pour tout x, donc $(x-2)^2 = 0$ ssi $x = 2$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
x^2-4x+4		$+$	0	$+$	

$S = \{2\}$.

3 $2x^2 - 5x + 10 \geq 0$
$\Delta = 25 - 80 = -55 < 0$.
Comme $a = 2 > 0$ et $\Delta < 0$, le polynôme est toujours strictement positif.

x	$-\infty$		$+\infty$
$2x^2 - 5x + 10$		$+$	

$S = \mathbb{R}$.

Exercice 7 — Solution — Peinture

1. Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût.
La recette pour x tonnes est $R(x) = 0,67x$ (en milliers d'euros).
Donc $B(x) = R(x) - C(x) = 0,67x - (0,05x^2 - 0,1x + 2,45) = -0,05x^2 + 0,77x - 2,45$.

2. On cherche quand $B(x) > 0$, soit $-0,05x^2 + 0,77x - 2,45 > 0$.
On calcule $\Delta = 0,77^2 - 4 \times (-0,05) \times (-2,45) = 0,5929 - 0,49 = 0,1029$.
$\sqrt{\Delta} \approx 0,321$.
$x_1 = \frac{-0,77-0,321}{-0,1} = \frac{-1,091}{-0,1} = 10,91$ et $x_2 = \frac{-0,77+0,321}{-0,1} = 4,49$.
Comme $a = -0,05 < 0$, le bénéfice est positif entre les racines.

x	1		4.49		10.91		20
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'entreprise réalise un bénéfice positif pour une production entre environ $4,5$ et $10,9$ tonnes.
Sur l'intervalle $[1;20]$, cela donne $x \in [4,5;10,9]$.

Exercice 8 — Solution — Balançoires

1. Le bénéfice est $B(x) = R(x) - f(x)$ où $R(x) = 300x$ est la recette.
Donc $B(x) = 300x - (x^2 + 230x + 325) = -x^2 + 70x - 325$.

2. L'entreprise est rentable quand $B(x) \geq 0$, soit $-x^2 + 70x - 325 \geq 0$.
On calcule $\Delta = 70^2 - 4 \times (-1) \times (-325) = 4900 - 1300 = 3600$.
$\sqrt{\Delta} = 60$.
$x_1 = \frac{-70-60}{-2} = 65$ et $x_2 = \frac{-70+60}{-2} = 5$.
Comme $a = -1 < 0$, le bénéfice est positif entre les racines.

x	0		5		50		65
$B(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0

L'entreprise doit produire entre 5 et 65 balançoires pour être rentable.
Comme la production est limitée à 50 balançoires, l'entreprise est rentable pour $x \in [5;50]$.

Exercice 9 — Solution — Vérifications

1. Vérifions que -1 est racine : $f(-1) = 2 \times 1 - 8 \times (-1) - 10 = 2 + 8 - 10 = 0$. ⊠
Vérifions que 5 est racine : $f(5) = 2 \times 25 - 8 \times 5 - 10 = 50 - 40 - 10 = 0$. ⊠

2. Comme -1 et 5 sont les deux racines de f et que $a = 2$, la forme factorisée est :
$f(x) = 2(x - (-1))(x - 5) = 2(x + 1)(x - 5)$.

Exercice 10 — Solution — Relation entre racines

1. Pour $f(x) = x^2 + 5x - 6$:
On teste $x = 1$: $f(1) = 1 + 5 - 6 = 0$. Donc 1 est une racine évidente.
On utilise la relation $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = -6$.
Donc $1 \times x_2 = -6$, d'où $x_2 = -6$.
Forme factorisée : $f(x) = (x - 1)(x + 6)$.

2. Pour $g(x) = -2x^2 + 5x + 18$:
On teste $x = -2$: $g(-2) = -2 \times 4 + 5 \times (-2) + 18 = -8 - 10 + 18 = 0$. Donc -2 est une racine.
On utilise la relation $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{18}{-2} = -9$.
Donc $(-2) \times x_2 = -9$, d'où $x_2 = \frac{9}{2}$.
Forme factorisée : $g(x) = -2(x + 2)\left(x - \frac{9}{2}\right) = -(x + 2)(2x - 9)$.

Exercice 11 — Solution — Automatisation

1 Programme pour tester si une valeur est racine :

a. Code complété :

```
def est_racine(a, b, c, x):
    image = a * x * x + b * x + c
    if image == 0:
        return "C'est une racine"
    else:
        return "Ce n'est pas une racine"
```

b. L'appel `est_racine(1, 0, -1, 1)` calcule $1 \times 1^2 + 0 \times 1 - 1 = 0$.
Donc la fonction retourne `"C'est une racine"`.

2 Programme pour calculer les racines :

a. Code complété :

```
from math import sqrt


def racines_trinome(a, b, c):
    delta = b * b - 4 * a * c
    if delta > 0:
        x1 = (-b - sqrt(delta)) / (2 * a)
        x2 = (-b + sqrt(delta)) / (2 * a)
        return (x1, x2)
    elif delta == 0:
        x = -b / (2 * a)
        return (x,)
    else:
        return ()
```

b. L'appel `racines_trinome(1, -5, 6)` calcule :
$\Delta = 25 - 24 = 1$, donc $x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$.
La fonction retourne `(2.0, 3.0)`.

Exercice 12 — Solution — Producteur de carottes

Partie A : lectures graphiques

1 Par lecture graphique, $C_m(7) \approx 600$ euros.

2 Tableau de variations de C_m sur $[1; 10]$:

x	1		4		10
$C_m(x)$		↘		↗	

3 Le coût moyen est minimal pour $x \approx 4$ km de tissu.

Partie B : étude du bénéfice

1 a. 5 km de tissu sont vendus $5 \times 680 = 3400$ euros.

b. $R(x) = 680x$.

2 $B(x) = R(x) - C(x) = 680x - (15x^3 - 120x^2 + 500x + 750)$
$= 680x - 15x^3 + 120x^2 - 500x - 750 = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$.

3 $B'(x) = -45x^2 + 240x + 180$.

4 a. $B'(6) = -45 \times 36 + 240 \times 6 + 180 = -1620 + 1440 + 180 = 0.$
$B'\left(\frac{-2}{3}\right) = -45 \times \frac{4}{9} + 240 \times \frac{-2}{3} + 180 = -20 - 160 + 180 = 0.$

b. $B'(x) = -45x^2 + 240x + 180 = -45(x^2 - \frac{16}{3}x - 4)$
$= -45\,(x - 6)\left(x + \frac{2}{3}\right)$.

c. Sur $[1; 10]$, comme $a = -45 < 0$, $B'(x) > 0$ pour $x \in]1; 6[$ et $B'(x) < 0$ pour $x \in]6; 10[$.

5 Tableau de variations de B sur $[1; 10]$:

x	1		6		10
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$		↗		↘	

6 Le bénéfice est maximal pour $x = 6$ km de tissu.
$B(6) = -15 \times 216 + 120 \times 36 + 180 \times 6 - 750 = -3240 + 4320 + 1080 - 750 = 1410$ euros.

Exercice 13 — Solution — Producteur de carottes

1 Production de 3 tonnes de carottes

a. $C(3) = 27 - 135 + 234 - 650 = -524$ euros.
Le coût est de -524 euros (ce qui signifie que le modèle n'est pas valide pour 3 tonnes, ou qu'il y a une erreur dans l'énoncé).

b. Les revenus sont $R(3) = 150 \times 3 = 450$ euros.

c. Le bénéfice est $B(3) = 450 - (-524) = 974$ euros. L'entreprise réalise des bénéfices.

2 Étude des bénéfices

a. $R(x) = 150x$.

b. $B(x) = R(x) - C(x) = 150x - (x^3 - 15x^2 + 78x - 650)$
$= 150x - x^3 + 15x^2 - 78x + 650 = -x^3 + 15x^2 + 72x + 650$.

c. $B'(x) = -3x^2 + 30x + 72$.

d. On cherche les racines de $B'(x) = -3x^2 + 30x + 72 = -3(x^2 - 10x - 24)$.
$\Delta = 100 + 96 = 196$, donc $\sqrt{\Delta} = 14$.
$x_1 = \frac{10-14}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{10+14}{2} = 12$.
Comme $a = -3 < 0$, $B'(x) > 0$ pour $x \in]-2; 12[$ et $B'(x) < 0$ pour $x \in]-\infty; -2[\cup]12; +\infty[$.

x	$-\infty$		-2		12		$+\infty$
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

e. Sur $[0; 16]$, B est croissante sur $[0; 12]$ et décroissante sur $[12; 16]$.
Tableau de variations :

x	0		12		16
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

f. Le bénéfice est maximal pour $x = 12$ tonnes.
$B(12) = -1728 + 2160 + 864 + 650 = 1946$ euros.