

# Opérations et dérivation - Plan de travail

1G math – février 2026

## 1 Produit de fonctions

- ✂ Exercice 1: Dérivée d'un produit.....☆☆☆☆☆
- 🔍 Exercice 2: Simplification lors de la dérivation.....☆☆☆☆☆

## 2 Quotient de fonctions

- ✂ Exercice 3: Calculs avec l'inverse.....☆☆☆☆☆
- ✂ Exercice 4: Variations d'un quotient.....☆☆☆☆☆
- ✂ Exercice 5: Calculs avec des quotients.....☆☆☆☆☆

## 3 Composition de fonctions

- ✂ Exercice 6: Coût moyen et coût marginal.....☆☆☆☆☆
- ✂ Exercice 7: Problème d'optimisation.....☆☆☆☆☆
- ✂ Exercice 8: Calculs avec composition.....☆☆☆☆☆
- 🔍 Exercice 9: Toit incliné et optimisation.....☆☆☆☆☆
- 🔍 Exercice 10: Triangle isocèle et aire maximale.....☆☆☆☆☆

### Exercice 1 ✂ Dérivée d'un produit

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de dérivabilité puis calculer la dérivée.

<b>1</b> $f(x) = (2x + 3)(5x - 1)$	<b>3</b> $h(x) = \sqrt{x}(x^2 + 5x)$	<b>5</b> $k(x) = \sqrt{x}(2x^2 - x + 3)$
<b>2</b> $g(x) = (x^2 + 1)(3x + 2)$	<b>4</b> $i(x) = x(x^2 - 3x + 1)$	

### Exercice 2 🔍 Simplification lors de la dérivation

$f$  est la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = (6\sqrt{x} - 1)(x^3 + x)$ .


On écrit  $f(x) = u(x) \times v(x)$  avec  $u : x \mapsto 6\sqrt{x} - 1$  et  $v : x \mapsto x^3 + x$ .

- 1** Justifier par règles opératoires, la dérivabilité de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
- 2** Donner les expressions de  $u(x)$ ,  $v(x)$ ,  $u'(x)$  et  $v'(x)$  puis écrire l'expression de  $f'(x)$  en fonction de  $u(x)$ ,  $v(x)$ ,  $u'(x)$  et  $v'(x)$ .
- 3** Démontrer que pour tout réel  $x > 0$ , on a  $f'(x) = 21x^2\sqrt{x} - 3x^2 + 9\sqrt{x} - 1$ .
- 4** Représenter la courbe de  $f$  avec sa calculatrice. Quelle conjecture peut-on faire sur la dérivabilité de  $f$  en 0 ?
- 5** Démontrer cette conjecture avec la définition de la dérivabilité en un point.

### Exercice 3 ✂ Calculs avec l'inverse

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de dérivabilité puis calculer la dérivée.

<b>1</b> $f(x) = \frac{1}{3x + 5}$	<b>3</b> $k(x) = \frac{1}{4x + 7}$	<b>5</b> $j(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$
<b>2</b> $i(x) = \frac{1}{5 - x}$	<b>4</b> $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$	<b>6</b> $h(x) = \frac{1}{2x^2 - 3x + 1}$

Exercice 4 

## Variations d'un quotient

$f$  est la fonction d'expression  $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 1}$ .

- 1 Déterminer le domaine de dérivabilité de  $f$ .
- 2 Calculer  $f'(x)$  la fonction dérivée de  $f(x)$
- 3 Étudier le signe de  $f'(x)$  et en déduire les variations de  $f(x)$ .

Exercice 5 

## Calculs avec des quotients

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de dérivabilité puis calculer la dérivée.

- |  |  |   |
|--|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1 <math>f(x) = \frac{x}{2x + 1}</math></li> <li>2 <math>g(x) = \frac{3x + 2}{x^2 + 1}</math></li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>3 <math>h(x) = \frac{x^2}{x + 3}</math></li> <li>4 <math>i(x) = \frac{2x - 5}{3x + 4}</math></li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>5 <math>j(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}</math></li> <li>6 <math>k(x) = \frac{4x}{x^2 - 1}</math></li> </ol> |
|--|--|---|

Exercice 6 

## Coût moyen et coût marginal

Le coût total de production, exprimé en milliers d'euros, pour produire  $q$  kilogrammes d'un produit cosmétique est donné par la fonction  $C$  définie sur  $I = [1; 20]$  par :

$$C(q) = 4 + q + \frac{q^2}{4}.$$

Le coût moyen  $C_M(q)$  de production pour une quantité  $q$  fabriquée est :

$$C_M(q) = \frac{C(q)}{q}.$$

Le coût marginal  $C_m(q)$  pour une quantité  $q$  fabriquée est égal à :

$$C_m(q) = C'(q).$$

- 1 Déterminer, pour tout réel  $q$  de  $I$ ,  $C_M(q)$  et  $C_m(q)$ .
- 2 Étudier les variations de  $C_M$  et dresser le tableau de variations complet sur  $I$ .
- 3 L'affirmation suivante est-elle vraie ?  
« Lorsque le coût moyen est minimal, il est égal au coût marginal. »

Exercice 7 

## Problème d'optimisation

Une entreprise fabrique et vend  $x$  tonnes d'un certain produit par jour,  $x$  étant compris entre 10 et 100. Elle doit assumer des charges représentant un coût total quotidien dont le montant en centaines d'euros est donné par  $C(x) = 0,2x^2 + 8x + 500$ .

**Partie A** Le coût moyen unitaire  $C_m$  de fabrication d'une tonne de produit est exprimé en centaines d'euros et est égal, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $I = [10; 100]$  à :

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

- 1 Justifier que la fonction  $C_m$  est dérivable sur  $I$ , et que pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $C'_m(x) = \frac{0,2x^2 - 500}{x^2}$ .
- 2 Étudier le signe de  $C'_m(x)$  et en déduire les variations de  $C_m(x)$  sur  $I$ .
- 3 En déduire la quantité de produit fabriqué quotidiennement pour laquelle le coût moyen unitaire est minimal.

## Partie B

- 1 Le prix de vente d'une tonne de produit dépend de la quantité  $x$  produite et s'exprime, en centaines d'euros, par la relation :  $p(x) = 62 - \frac{x}{4}$ .
- Déterminer la recette totale obtenue avec une production et une vente de 40 tonnes de produit.
  - Déterminer en fonction de la quantité  $x$  produite et vendue le montant de la recette totale  $R(x)$ .
- 2 Le bénéfice  $B$ , en centaines d'euros, réalisé par l'entreprise pour la vente de  $x$  tonnes de produit est égal, pour tout réel  $x$  de  $I$ , à :  $B(x) = R(x) - C(x)$ .
- Montrer qu'alors  $B$  est la fonction définie sur  $I$  par  $B(x) = -0,45x^2 + 54x - 500$ .
  - Combien de tonnes l'entreprise doit produire et vendre afin d'obtenir un bénéfice maximum ? Donner le montant de ce bénéfice.

D'après bac

## Exercice 8 ✂

## Calculs avec composition

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1  $f(x) = (2x + 3)^5$

3  $h(x) = \frac{1}{4x - 1}$

5  $j(x) = (1 - 2x)^3$

2  $g(x) = (5 - 3x)^4$

4  $i(x) = \sqrt{3x + 7}$

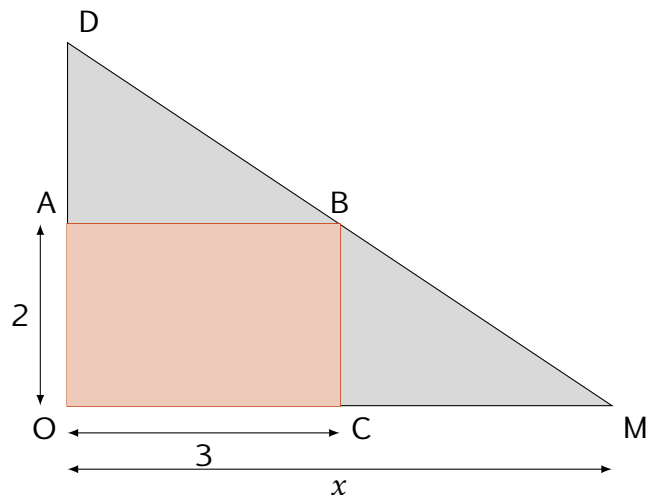
6  $k(x) = \frac{1}{2 - 5x}$

## Exercice 9 🔍

## Toit incliné et optimisation

Un charpentier doit construire le toit incliné (DM) au dernier étage d'une maison, en laissant un espace rectangulaire vide (OABC) qui correspondra à la surface habitable de cet étage. Il observe qu'il peut faire varier l'inclinaison de ce toit tout en conservant l'espace habitable OABC ; ainsi la hauteur OD va varier en fonction de la largeur au sol  $x$ . Afin d'optimiser l'espace de rangement BCM et l'espace « grenier » ABD, il souhaite établir la largeur  $x$  qui permettrait de minimiser la surface OMD.

Dans le schéma ci-dessous les longueurs sont exprimées en mètres.



- À l'aide d'un théorème de géométrie, exprimer OD en fonction de  $x$ .
- En déduire que l'aire du triangle OMD peut être modélisée par la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]3; +\infty[$  par

$$g(x) = \frac{x^2}{x - 3}.$$

- Calculer  $g'(x)$  la fonction dérivée de  $g(x)$ .
- Étudier le signe de  $g'(x)$  puis les variations de  $g$  sur  $]3; +\infty[$
- Conclure le problème.

**Exercice 10** **Triangle isocèle et aire maximale**

Le triangle ABC est isocèle. Son périmètre est de 10 cm. Le segment [AH] est la hauteur issue du sommet principal A. On cherche à construire ce triangle de façon à ce que son aire soit maximale. Pour cela, on pose  $BC = x$ .

- 1 Démontrer que  $0 \leq x < 5$ .
- 2 Exprimer AH en fonction de  $x$ .
- 3 En déduire que l'aire  $\mathcal{A}$  du triangle est égal à

$$\mathcal{A}(x) = \frac{x}{2} \sqrt{25 - 5x}.$$

- 4 Justifier que la fonction  $\mathcal{A}$  est dérivable sur l'intervalle  $[0; 5[$  et démontrer que pour tout  $x$  de cet intervalle,

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{50 - 15x}{4\sqrt{25 - 5x}}$$

- 5 En déduire la valeur de  $x$  pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale.

