Fonction exponentielle - Définition et propriétés

– février 2026

1 Définition de la fonction exponentielle

Contexte : une question mathématique naturelle

Nous avons étudié les fonctions dérivées et leur lien avec les variations. Une question naturelle se pose alors :

Existe-t-il une fonction qui serait égale à sa propre dérivée ?

Autrement dit, existe-t-il une fonction f telle que $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?

Définition: Existence et unicité de la fonction exponentielle

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

- $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$

Cette fonction s'appelle la **fonction exponentielle** et se note **exp**.

Démonstration : L'existence est admise. On démontrera l'unicité.

Laisser une dizaine de lignes

Propriété: Positivité et relation fonctionnelle

- La fonction exponentielle est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp(x) > 0$$

- Pour tout réel x, on a

$$\exp(x) \times \exp(-x) = 1$$

Démonstration: *Laisser une dizaine de lignes*

Propriété: Croissance stricte

La fonction exp est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variations.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$	
$\exp(x)$	$\nearrow$	1	$\nearrow$

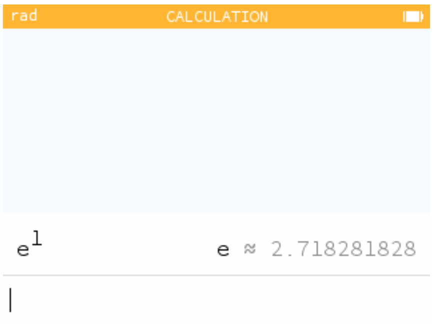
Définition: Nombre d'Euler

L'image de 1 pour la fonction exponentielle est le **nombre d'Euler**.

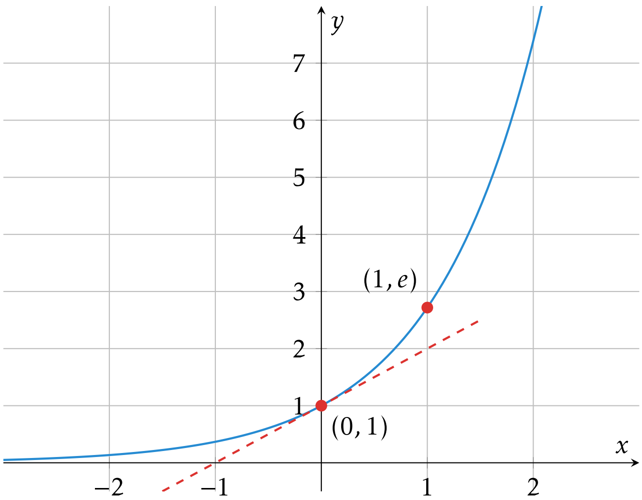
$$\exp(1) = e \qquad e \approx 2.718$$

Remarques :

- Dans le plan de travail, on a vu comment trouver une valeur approchée du nombre d'Euler.
- pour utiliser cette valeur avec la calculatrice



Propriété: Courbe représentative



Propriétés de la courbe :

- La courbe est toujours au-dessus de l'axe des abscisses (car $\exp(x) > 0$)
- Elle est strictement croissante
- Elle passe par le point de coordonnées $(0, 1)$
- La tangente en $(0, 1)$ a pour équation $y = x + 1$
- Elle passe par le point de coordonnées $(1, e)$