# Fonction exponentielle - Plan de travail

1G math – février 2026

Savoir-faire de la séquence

- Connaître la définition de la fonction exponentielle : $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$
- Justifier la positivité et la croissance de la fonction exponentielle
- Calculer la dérivée de fonctions de type $\exp(ax + b)$, produits et quotients
- Étudier les variations de fonctions exponentielles
- Modéliser une situation de croissance ou décroissance exponentielle

## 1 Construction de la fonction exponentielle

☐ Exercice 1: Méthode d'Euler ........ ☆☆☆☆☆

## 2 Dérivation de fonctions exponentielles

☐ Exercice 2: Dérivées de produits ........ ☆☆☆☆☆
☐ Exercice 3: Dérivées composés ........ ☆☆☆☆☆
☐ Exercice 4: Dérivées mixtes ........ ☆☆☆☆☆

## 3 Études de fonctions

☐ Exercice 5: Etude de fonctions ........ ☆☆☆☆☆

## 4 Modélisation

☐ Exercice 6: Placement bancaire ........ ☆☆☆☆☆
☐ Exercice 7: Audience d'une chaîne YouTube ........ ☆☆☆☆☆

**Légende:** : pour découvrir quelque chose : à faire en groupe : pour s'entrainer

## Exercice 1 Méthode d'Euler

On cherche à construire une fonction $f$ qui vérifie $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f(0) = 1$.

Dans cet exercice, nous allons chercher à approximer cette fonction.

**1 Approximation avec un pas de 1**:

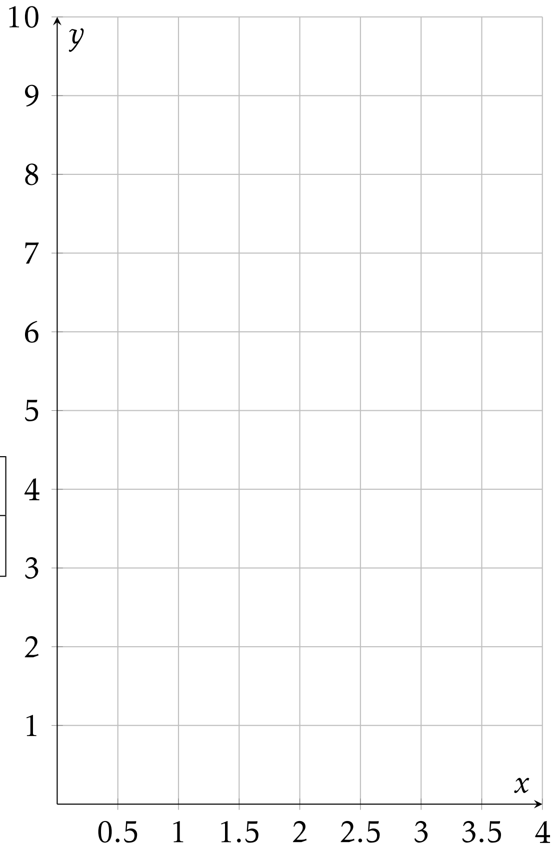
a. Placer le premier point $(x = 0)$de la courbe de cette fonction.

b. Tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse $0$.

c. Le principe de la **méthode d'Euler** est d'avancer du pas (ici $1$) en suivant la tangente pour obtenir la prochaine valeur de la fonction. Quelle est alors la valeur de $f(2)$ dans le cadre de cette approximation?

d. Recommencer la question précédente pour déterminer une approximation de $f(3)$.

e. Poursuivre la méthode pour compléter le tableau.




| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

**2 Approximation avec un pas de 0.5**:

a. Reprendre les questions précédentes avec un pas de 0,5. Tracer la nouvelle approximation et compléter le tableau.

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | |

**3 Approximation avec un pas de 0.1**: On pose la suite $(u_n)$ où la valeur de $u_n$ est égale aux approximations de $f(n \times 0.1)$ avec la méthode d'Euler.

a. En reprenant la méthode d'Euler compléter le tableau suivant

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x = n \times 0{,}1$ | | | | | | | | | | | |
| $u_n$ | | | | | | | | | | | |

b. Quelle est la nature de la suite $(u_n)$?

c. Exprimer $(u_n)$ en fonction de $n$

**4 Approximation avec un pas $p$**: On pose la suite $(u_n)$ où la valeur de $u_n$ est égale aux approximations de $f(n \times p)$ avec la méthode d'Euler.

En reprenant la question précédente, donner la formule explicite de $(u_n)$ en fonction de $n$ et $p$.

**5 Approximation de $f(1)$**: On décide de prendre un pas de taille $p = \dfrac{1}{k}$ avec $k$ un entier. La suite $(u_n)$ est donc l'approximation des valeurs de $f(n \times \dfrac{1}{k})$

a. Donner la formule explicite de $(u_n)$ en fonction de $n$ et de $k$.

b. Pour quelle valeur de $n$, la valeur $u_n$ approximera $f(1)$?

c. Proposer une formule approximant de $f(1)$ en fonction de $k$.

d. Compléter le tableau suivant avec des résultats arrondis au millième

| $k$ | 10 | 100 | 1000 | 10000 | 100000 | 1000000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(1) \approx$ | | | | | | |

## Exercice 2 — Dérivées de produits

Calculer la dérivée des fonctions suivantes. On donnera le résultat sous la forme $(ax+b)\exp(x)$ :

1. $f(x) = x\exp(x)$
2. $g(x) = (2x+1)\exp(x)$
3. $h(x) = (3x-2)\exp(x)$
4. $i(x) = x^2\exp(x)$
5. $j(x) = (x^2+x)\exp(x)$
6. $k(x) = (x^2-3x+1)\exp(x)$

## Exercice 3 — Dérivées composés

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \exp(3x)$
2. $g(x) = \exp(-2x)$
3. $h(x) = \exp(5x+1)$
4. $k(x) = \exp(-x+4)$
5. $l(x) = \exp\left(\frac{x}{2}\right)$
6. $m(x) = \exp\left(-\frac{3x}{4}\right)$

## Exercice 4 — Dérivées mixtes

Calculer la dérivée des fonctions suivantes. On donnera le résultat sous la forme $(ax+b)\exp(cx+d)$ :

1. $f(x) = x\exp(2x)$
2. $g(x) = (x+1)\exp(-x)$
3. $h(x) = (2x-3)\exp(3x)$
4. $i(x) = x^2\exp(-2x)$
5. $j(x) = (x^2+2x)\exp(x+1)$
6. $k(x) = (3x-1)\exp(2x-1)$

## Exercice 5 — Etude de fonctions

1. On considère $f(x) = (x+1)\exp(x)$.
   a. Démontrer que $f'(x) = (x+2)\exp(x)$
   b. Étudier le signe de $x+2$
   c. En déduire le signe de $f'(x)$ et les variations de $f(x)$
2. On considère $f(x) = (x^2+2x-3)\exp(x)$.
   a. Démontrer que $f'(x) = (x^2+4x-1)\exp(x)$
   b. Étudier le signe de $x^2+4x-1$
   c. En déduire le signe de $f'(x)$ et les variations de $f(x)$
3. On considère $f(x) = (x^2-5x+6)\exp(x)$.
   a. Démontrer que $f'(x) = (x^2-3x+1)\exp(x)$
   b. Étudier le signe de $x^2-3x+1$
   c. En déduire le signe de $f'(x)$ et les variations de $f(x)$
4. On considère $f(x) = (x^2+x+1)\exp(x)$.
   a. Démontrer que $f'(x) = (x^2+3x+2)\exp(x)$
   b. Étudier le signe de $x^2+3x+2$
   c. En déduire le signe de $f'(x)$ et les variations de $f(x)$

## Exercice 6 — Placement bancaire

Un capital de 1000 euros est placé le 1 Janvier 2019 au taux fixe de 1,4%.

**1.** On note $c_n$ le capital au premier Janvier $2019+n$.

1. Démontrer que la suite $(c_n)$ est géométrique et déterminer sa raison.
2. Justifier que pour tout entier naturel $n$ on a, $c_{n+1} - c_n = 0{,}014c_n$.
   On en déduit que l'augmentation du capital est proportionnelle au capital.
3. Comment peut-on qualifier la croissance du capital ?

**2.** On veut modéliser l'évolution du capital par une fonction $f$ dérivable sur $[0;+\infty[$ telle que le taux d'évolution instantané du capital $f'(t)$ est proportionnel au capital $f(t)$ selon une relation analogue à celle vérifiée par la suite $(c_n)$. On recherche donc une fonction $f$ vérifiant l'équation :

$$f' = 0{,}014f \qquad (E)$$

1. Vérifier que la fonction $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = k\exp(0{,}014t)$, où $k$ est une constante réelle, est solution de l'équation $(E)$.
2. Déterminer la valeur de $k$ pour que $f(0) = 1000$.

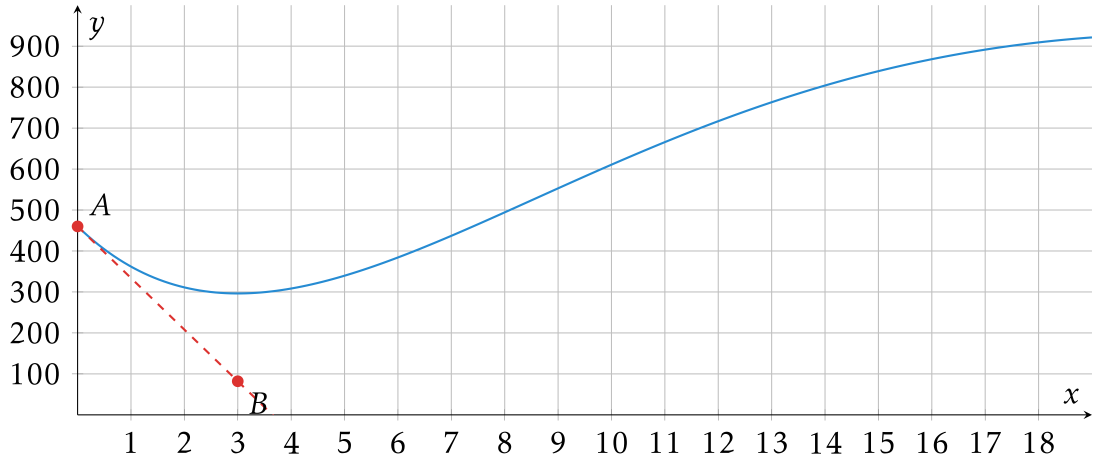
**3.**

1. Calculer le capital au 1 Janvier 2030 en utilisant la suite $(c_n)$ puis la fonction $f$.
2. Calculer le capital au 1 mai 2030 en utilisant la fonction $f$.

## Exercice 7 — Audience d'une chaîne YouTube

### Partie A

La courbe $(C)$ ci-dessous, associée à une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0;19]$, représente l'audience journalière d'une chaîne YouTube entre le 1 janvier 2010 (année numéro 0) et le 1 janvier 2029 (année numéro 19), c'est-à-dire le nombre quotidien de vues, en milliers.




Ainsi, le 1 janvier 2010 la chaîne a enregistré environ 460 000 vues quotidiennes.

1. Décrire l'évolution de l'audience journalière de cette chaîne YouTube entre le 1 janvier 2010 et le 1 janvier 2029.
2. Donner une valeur approchée du nombre de vues quotidiennes le 1 janvier 2024.
3. La droite $(AB)$, où les points $A$ et $B$ ont pour coordonnées $A(0;460)$ et $B(3;82)$, est la tangente à la courbe $(C)$ au point $A$.
   Déterminer la valeur de $f'(0)$ où $f'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $f$ représentée par $(C)$.

### Partie B

On cherche maintenant à prévoir l'évolution de l'audience de cette chaîne YouTube lors des dix prochaines années. On considère que le nombre journalier de vues (exprimé en milliers) de la chaîne est modélisé par la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0;29]$ par :

$$f(x) = (20x^2 - 80x + 460)\exp(-0{,}1x)$$

où $x$ représente le nombre d'années depuis 2010 (par exemple $x = 19$ pour l'année 2029).

1. Donner une valeur approchée au millier du nombre de vues quotidiennes de la chaîne le 1 janvier 2024.
2. On note $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur l'intervalle $[0;29]$.
   a. Démontrer que $f'$ est définie par : $f'(x) = (-2x^2 + 48x - 126)\exp(-0{,}1x)$.
   b. Etudier le signe du polynôme $-2x^2 + 48x - 126$.
   c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;29]$ et construire le tableau des variations de $f$ sur l'intervalle $[0;29]$. Arrondir les éléments du tableau à l'unité.
   d. Le nombre journalier de vues de cette chaîne YouTube dépassera-t-il la barre du million avant l'année 2029 ? Justifier.
3. On admet que l'équation $f(x) = 800$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $[3;21]$.
   Compléter le code Python ci-dessous pour que la fonction `seuil()` renvoie l'année où le nombre journalier de vues de la chaîne YouTube dépassera 800 000.

```python
from math import exp

def f(x):
   return (20 * x ** 2 - 80 * x + 460) * exp(-0.1 * x)

def seuil():
   x = 3
   while ...............:
      x = x ......
   return ...........
```