









Variables aléatoires - Plan de travail

1G math – avril 2026




Savoir-faire de la séquence

- Interpréter en situation et utiliser les notations $X = a$, $X \neq a$, $P(X = a)$, $P(X \neq a)$. Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement.
- Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire.
- Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
- Calculer une espérance, une variance, un écart type.
- Utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème (mise pour un jeu équitable...).

1 Loi de probabilité

-  Exercice 1: Domino ☆ ☆ ☆ ☆ ☆
-  Exercice 2: Pièce ☆ ☆ ☆ ☆ ☆
-  Exercice 3: Variables aléatoire ☆ ☆ ☆ ☆ ☆
-  Exercice 4: Variable aléatoire Y ☆ ☆ ☆ ☆ ☆
-  Exercice 5: Jeu de dé ☆ ☆ ☆ ☆ ☆
-  Exercice 6: Chaîne de fabrication ☆ ☆ ☆ ☆ ☆
-  Exercice 7: Association sportive ☆ ☆ ☆ ☆ ☆
-  Exercice 8: Urne ☆ ☆ ☆ ☆ ☆



2 Espérance

-  Exercice 9: Faut-il répondre au hasard ? ☆ ☆ ☆ ☆ ☆
-  Exercice 10: Espérance ☆ ☆ ☆ ☆ ☆
-  Exercice 11: Capteurs électroniques ☆ ☆ ☆ ☆ ☆

3 Variance et écart type

-  Exercice 12: Variance et écart type ☆ ☆ ☆ ☆ ☆

4 Comme au bac

-  Exercice 13: Dés — E3C sujet 2 2021 ☆ ☆ ☆ ☆ ☆
-  Exercice 14: BDS — E3C sujet 3 2021 ☆ ☆ ☆ ☆ ☆

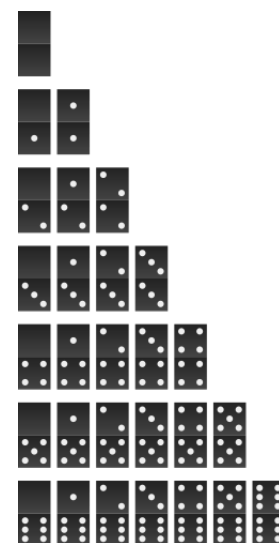
Légende: : pour découvrir quelque chose : à faire en groupe : pour s'entraîner

Exercice 1 

Domino

On tire au hasard un domino parmi les pièces d'un jeu de domino illustré ci-contre. On supposera que les dominos sont indiscernables au touché.

- 1 Quelle est l'univers de cette expérience? Pourquoi peut-on dire que l'on a une situation d'équiprobabilité? Quelle est la probabilité de chaque issues?
- 2 On pose la règle suivante: "On obtient autant de points que le nombre de points présent sur le domino tiré."
 - a. Quelles sont les résultats possibles de l'expérience en suivant cette règle?
 - b. Calculer la probabilité de chaque résultat possible et présenter ces probabilités sous forme de tableau.
- 3 On change la règle pour la règle suivante: "On obtient 10 points si on a un double et 0 sinon".
 - a. Quelles sont les résultats possibles de l'expérience en suivant cette règle?
 - b. Calculer la probabilité de chaque résultat possible et présenter ces probabilités sous forme de tableau.

Exercice 2 

Pièce

On lance trois fois de suite une pièce équilibrée et l'on note après chaque lancer si le côté sorti est pile (noté P) ou face (noté F).

- 1 Représenter à l'aide d'un arbre l'ensemble des issues possibles de cette expérience aléatoire. Une issue est un triplet comme FPF .
- 2 Combien y-a-t-il d'issues dans l'univers Ω de cette expérience aléatoire? Quelle loi de probabilité peut-on définir sur Ω ?
Calculer les probabilités des événements suivants :

« Obtenir exactement un Pile » « Obtenir au moins un Pile »

- 3 On définit à partir de cette expérience aléatoire un jeu qui consiste à gagner 1 € pour chaque face sorti et à perdre 1 € pour chaque pile sorti.

La fonction G de Ω dans \mathbb{R} associe à une issue de l'expérience aléatoire le gain du joueur.
Par exemple à l'issue FPF , la fonction G associe le gain $1 - 1, 1 + 1 = 0,9$.

Quelles sont les autres issues telles que $G = 0,9$? En déduire la probabilité de l'événement « le joueur gagne 0,9 € ».

- 4 Quelles sont toutes les valeurs prises par la variable aléatoire G ?
- 5 Lister toutes les valeurs prises par G , calculer les probabilités associées à chaque valeur puis organisez vos résultats sous forme d'un tableau.

Exercice 3 

Variables aléatoire

Dans chaque cas, déterminer la valeur de p pour que le tableau soit une loi de probabilités.

- 1

x_i	-2	1	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	p

- 2


x_i	-3	1	2
$P(Y = x_i)$	0,25	p	0,55

- 3

x_i	-5	-2	0	1	4
$P(Z = x_i)$	p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

- 4

x_i	-1	4	5
$P(W = x_i)$	$-2p + 0,25$	$p + 0,25$	$p + 0,5$

Exercice 4 

Variable aléatoire Y

On considère une variable aléatoire Y dont on donne la loi de probabilité ci-dessous avec des pointillés pour les probabilités inconnues.

k	-5	-3	4	8
$P(Y = k)$...	0,15	0,05	...

On sait que $P(Y = -5) = 2 \times P(Y = 8)$.

- Calculer la valeur de la probabilité $P(Y = 8)$.
- Calculer les probabilités des événements $\{Y \geq 4\}$ et $\{Y < 4\}$.

Exercice 5 

Jeu de dé

On lance deux dés équilibrés à 4 faces.

On note X la variable aléatoire donnant la valeur absolue de l'écart entre les deux dés.

- Lister les issues de l'évènement $\{X = 0\}$. Calculer la probabilité de $P(X = 0)$.
- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
- Lister les issues de l'évènement $\{X \geq 2\}$. Calculer la probabilité de $P(X \geq 2)$.

Exercice 6 

Chaîne de fabrication

À l'issue d'une chaîne de fabrication de jouets en bois, on recherche deux types de défauts : les défauts de solidité et les défauts de couleur. Une étude a permis de relever les résultats suivants sur un échantillon de 1 000 jouets :

	Défaut de couleur	Pas de défaut de couleur	Total
Défaut de solidité	5	28	33
Pas de défaut de solidité	15	952	967
Total	20	980	1 000

À réparer, un défaut de couleur coûte 5 € par jouet et un défaut de solidité coûte 12 € par jouet. X est la variable aléatoire donnant le coût de réparation d'un objet avant d'être mis sur le marché.

- Quelle valeur peut prendre X ? Tracer le tableau représentant la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
- Décrire par une phrase l'évènement $\{X \leq 10\}$. Préciser les caractéristiques des jouets concernés par cet évènement.
- Que vaut $P(X = 12)$? $P(X \geq 9)$?

Exercice 7 

Association sportive

Une association propose à tous ses membres des stages de découverte ou de perfectionnement de la pratique de certains sports. Les tarifs en euros de ces stages sont donnés dans le tableau ci-dessous.


	Judo	Danse hip-hop	Handball
Adultes	26	15	20
Jeunes	20	15	13

48 adultes se sont inscrits dont la moitié ont choisi le judo et 8 la danse hip-hop.

108 jeunes se sont inscrits dont un tiers ont choisi la danse hip-hop et 40 ont choisi le handball.

Le président de l'association tire au hasard la fiche de l'une des personnes inscrites. On note X la variable aléatoire donnant le tarif payé en euros par la personne.

- Décrire les caractéristiques des issues de l'évènement $\{X = 13\}$. Calculer $P(X = 13)$.
- Décrire les caractéristiques des issues de l'évènement $\{X \geq 20\}$. Calculer $P(X \geq 20)$.
- Déterminer la loi de probabilité de X .

Exercice 8 

Urne

Une urne contient n (n entier supérieur ou égal à 10) boules indiscernables au toucher dont cinq sont rouges, deux sont vertes et les autres sont jaunes. On tire au hasard une boule dans l'urne. Si celle-ci est verte, on gagne 3 €, si elle est jaune on gagne 5 €, sinon on perd 2 €. X est la variable aléatoire associant le gain algébrique au jeu.

- 1 Déterminer la loi de probabilité de X (les probabilités seront écrites en fonction de n).
- 2 Comment faut-il choisir n pour que la probabilité de gagner de l'argent à ce jeu soit supérieure ou égale à 0,6 ?

Exercice 9 

Faut-il répondre au hasard ?

Dans un concours, un QCM comporte des questions à 4 propositions dont une seule est correcte. Un candidat tombe sur une question dont il ne connaît pas du tout la réponse et envisage de répondre au hasard.

- 1
 - a. On suppose que le barème est le suivant: "1 point bonne réponse, 0 point mauvaise réponse". On note X la variable aléatoire associée à ce barème. Quelle est la loi de probabilité de X ?
 - b. On suppose que le barème est le suivant: "3 point bonne réponse, -1 point mauvaise réponse". On note Y la variable aléatoire associée à ce barème. Quelle est la loi de probabilité de Y ?
 - c. On suppose que le barème est le suivant: "2 points bonne réponse, -1 point mauvaise réponse". On note Z la variable aléatoire associée à ce barème. Quelle est la loi de probabilité de Z ?
 - d. On suppose que le barème est le suivant: "4 points bonne réponse, -1 point mauvaise réponse". On note W la variable aléatoire associée à ce barème. Quelle est la loi de probabilité de W ?
- 2 Parmi les barèmes proposés, pour lesquels le candidat doit répondre même au hasard ?

Exercice 10 

Espérance

Pour chaque variable aléatoire, calculer l'espérance.

1

x_i	-3	0	2	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,4	0,3	0,2

2

y_i	-2	1	4	6
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Exercice 11 

Capteurs électroniques

Une entreprise fabrique des capteurs électroniques. À la fin de la fabrication, trois cas peuvent se présenter : le capteur n'a pas de défaut, le capteur a un défaut de fonctionnement ou le capteur a un défaut de taille. Une étude de qualité a permis d'obtenir les résultats suivants :


	Pas de défaut	Défaut de fonctionnement	Défaut de taille
Nombre de capteurs	190	7	3

On tire au hasard un capteur dans la production et on regarde s'il a un défaut. On suppose que l'analyse de l'échantillon de 200 capteurs fournit une estimation des probabilités de l'état du capteur.

Il n'y a donc pas de capteurs ayant les deux défauts. Un capteur n'ayant pas de défaut coûte 10 € à l'entreprise. Les réparations suite à un défaut constaté font augmenter le coût de production de 4 € pour un capteur ayant un défaut de fonctionnement et de 6 € pour un capteur ayant un défaut de taille.

X est la variable aléatoire donnant le coût total d'un capteur tiré au hasard.

- 1 Donner la loi de probabilité de X .
- 2 Si on fabrique un grand nombre de capteurs, quel est le coût moyen d'un capteur ?
- 3 L'entreprise souhaite fabriquer un million de capteurs. Donner une estimation du coût de fabrication.

Exercice 12 

Variance et écart type

Pour les variables aléatoires des exercices 3 et 10. Calculer la variance et l'écart type.

Exercice 13 

Dés — E3C sujet 2 2021

- 1 On lance deux dés cubiques équilibrés « classiques » et on note les numéros apparaissant sur la face supérieure de chaque dé.
Soit X la variable aléatoire égale au produit des numéros apparaissant sur les deux faces.
Le jeu est gagné si le produit des numéros apparaissant sur les faces supérieures des deux dés lancés est strictement inférieur à 10.
 - a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X .
 - b. Déterminer la loi de probabilité de X .
 - c. Déterminer la probabilité de gagner.
- 2 On lance à présent deux dés spéciaux : ce sont des dés cubiques parfaitement équilibrés dont les faces sont numérotées différemment des dés classiques.
 - Les faces du premier dé sont numérotées avec les chiffres : 1, 2, 2, 3, 3, 4.
 - Les faces du deuxième dé sont numérotées avec les chiffres : 1, 3, 4, 5, 6, 8.
 On note Y la variable aléatoire égale au produit des numéros apparaissant sur les deux faces après lancer de ces deux dés spéciaux.
Déterminer $P(Y < 10)$.
- 3 Est-il préférable de jouer au jeu de la question 1 avec des dés classiques ou avec des dés spéciaux ?

Exercice 14 

BDS — E3C sujet 3 2021

Dans une école d'ingénieurs, certains étudiants s'occupent de la gestion des associations comme par exemple le BDS (bureau des sports). Sur les cinq années d'études, le cycle « licence » dure les trois premières années, et les deux dernières années sont celles du cycle de « spécialisation ». On constate que, dans cette école, il y a 40 % d'étudiants dans le cycle « licence » et 60 % dans le cycle de « spécialisation ».

- Parmi les étudiants du cycle « licence », 8 % sont membres du BDS ;
- Parmi les étudiants du cycle de « spécialisation », 10 % sont membres du BDS.

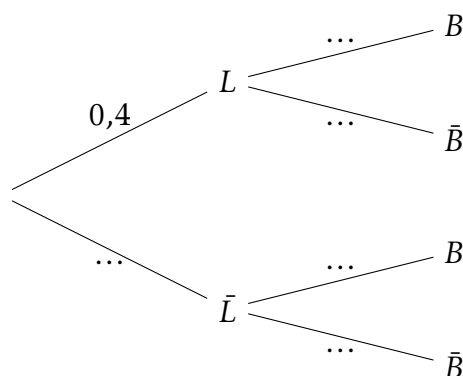
On considère un étudiant de cette école choisi au hasard, et on considère les événements suivants :

- L : « L'étudiant est dans le cycle licence » ; \bar{L} est son événement contraire.
- B : « L'étudiant est membre du BDS » ; \bar{B} est son événement contraire.

La probabilité d'un événement A est notée $P(A)$.

Partie A

- 1 Recopier et compléter l'arbre pondéré modélisant la situation.



- 2 Calculer la probabilité que l'étudiant choisi soit en cycle « licence » et membre du BDS.

3 En utilisant l'arbre pondéré, montrer que $P(B) = 0,092$.

Partie B

Le BDS décide d'organiser une randonnée en montagne. Cette sortie est proposée à tous les étudiants de cette école mais le prix qu'ils auront à payer pour y participer est variable. Il est de 60 € pour les étudiants qui ne sont pas membres du BDS, et de 20 € pour les étudiants qui sont membres du BDS. On désigne par X la variable aléatoire donnant la somme à payer pour un étudiant qui désire faire cette randonnée.

1 Quelles sont les valeurs prises par X ?

2 Donner la loi de probabilité de X , et calculer l'espérance de X .