Variables aléatoires - Solutions

1G math – avril 2026

Attention – Document généré par IA

Ce document a été essentiellement généré par une intelligence artificielle (LLM) et relu dans les grandes lignes. Des erreurs, des approximations ou des méthodes inhabituelles peuvent être présentes.

Restez critique face au contenu proposé et ne le considérez pas comme une vérité absolue.

Exercice 1 — Solution — Domino

1. L'univers est l'ensemble des 28 dominos du jeu. Les dominos étant indiscernables au toucher, chaque domino a la même probabilité d'être tiré : la situation est équiprobable. La probabilité de chaque issue est $\frac{1}{28}$.

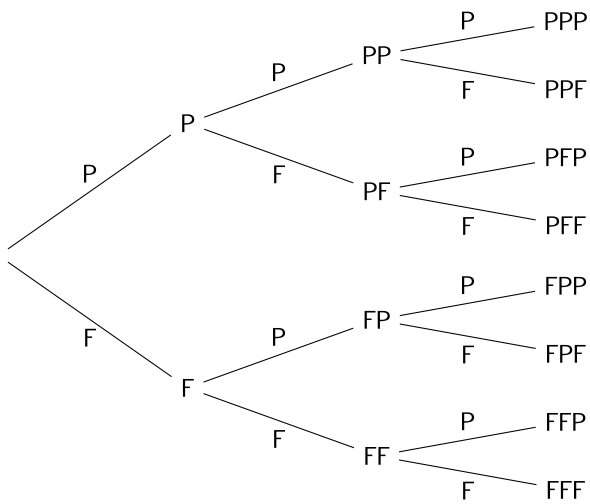
2. On note X le nombre de points sur le domino tiré.
   a. X peut prendre les valeurs : $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$.
   b. Pour chaque valeur k, on compte les dominos (i, j) avec $i + j = k$ et $i \leq j$:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$

3. On note Y le gain selon la nouvelle règle : 10 points si double, 0 sinon.
   a. Y peut prendre les valeurs 0 et 10.
   b. Il y a 7 doubles $((0, 0), (1, 1), \ldots, (6, 6))$ parmi 28 dominos.

y_i	0	10
$P(Y = y_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Exercice 2 — Solution — Pièce



1

2. Il y a **8** issues dans Ω. La pièce étant équilibrée, on définit la loi équiprobable : chaque issue a la probabilité $\frac{1}{8}$.

   $P(\text{exactement un Pile}) = P(\{PFF, FPF, FFP\}) = \frac{3}{8}$

   $P(\text{au moins un Pile}) = 1 - P(\{FFF\}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

3. $G(FPF) = 1 - 1{,}1 + 1 = 0{,}9$. De même : $G(PFF) = -1{,}1 + 1 + 1 = 0{,}9$ et $G(FFP) = 1 + 1 - 1{,}1 = 0{,}9$.

   Ces trois issues donnent $G = 0{,}9$, donc $P(G = 0{,}9) = \frac{3}{8}$.

4. Les valeurs prises par G sont :
   - $G(PPP) = -3{,}3$
   - $G = -1{,}2$ pour PPF, PFP, FPP

- $G = 0{,}9$ pour PFF, FPF, FFP
- $G(FFF) = 3$

5

g_i	$-3{,}3$	$-1{,}2$	$0{,}9$	3
$P(G = g_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Exercice 3 — Solution — Variables aléatoire

La somme des probabilités doit valoir 1.

1 $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + p = 1 \implies p = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

2 $0{,}25 + p + 0{,}55 = 1 \implies p = 0{,}20$

3 $p + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1 \implies p = 1 - \frac{3+2+2+4}{12} = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$

4 $(-2p + 0{,}25) + (p + 0{,}25) + (p + 0{,}5) = 1 \implies 1 = 1$: la somme vaut toujours 1.

Les probabilités doivent être positives ou nulles : $-2p + 0{,}25 \geq 0 \implies p \leq \frac{1}{8}$ et $p + 0{,}25 \geq 0 \implies p \geq -\frac{1}{4}$.

Donc $p \in \left[-\frac{1}{4} ; \frac{1}{8}\right]$.

Exercice 4 — Solution — Variable aléatoire Y

1 La somme des probabilités vaut 1 :

$$P(Y = -5) + 0{,}15 + 0{,}05 + P(Y = 8) = 1$$

Or $P(Y = -5) = 2 \times P(Y = 8)$, donc $3 \times P(Y = 8) + 0{,}20 = 1$, d'où :

$$P(Y = 8) = \frac{0{,}80}{3} = \frac{4}{15} \quad \text{et} \quad P(Y = -5) = \frac{8}{15}$$

2 $P(Y \geq 4) = P(Y = 4) + P(Y = 8) = 0{,}05 + \frac{4}{15} = \frac{1}{20} + \frac{4}{15} = \frac{19}{60}$

$P(Y < 4) = 1 - P(Y \geq 4) = 1 - \frac{19}{60} = \frac{41}{60}$

Exercice 5 — Solution — Jeu de dé

L'univers comporte $4 \times 4 = 16$ issues équiprobables.

1 $\{X = 0\} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$, donc $P(X = 0) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

2 Loi de probabilité de X :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

3 $\{X \geq 2\} = \{(1,3), (1,4), (2,4), (3,1), (4,1), (4,2)\}$, donc $P(X \geq 2) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

Exercice 6 — Solution — Chaîne de fabrication

1 Un jouet peut avoir : aucun défaut $(X = 0)$, uniquement un défaut de couleur $(X = 5)$, uniquement un défaut de solidité $(X = 12)$, les deux défauts $(X = 17)$.

x_i	0	5	12	17
$P(X = x_i)$	$\frac{952}{1000}$	$\frac{15}{1000}$	$\frac{28}{1000}$	$\frac{5}{1000}$

2 $\{X \leqslant 10\}$ correspond aux jouets n'ayant pas de défaut de solidité (coût au plus 5 €). Ce sont les 967 jouets sans défaut de solidité.

3 $P(X = 12) = \frac{28}{1000} = \frac{7}{250}$

$P(X \geq 9) = P(X = 12) + P(X = 17) = \frac{28+5}{1000} = \frac{33}{1000}$

Exercice 7 — Solution — Association sportive

Adultes (48) : 24 judo, 8 danse, 16 handball. Jeunes (108) : 32 judo, 36 danse, 40 handball. Total : 156 inscrits.

1 $\{X = 13\}$ correspond aux jeunes en handball. $P(X = 13) = \dfrac{40}{156} = \dfrac{10}{39}$.

2 $\{X \geq 20\}$ correspond aux adultes en handball ou en judo, et aux jeunes en judo.

$$P(X \geq 20) = \frac{16 + 24 + 32}{156} = \frac{72}{156} = \frac{6}{13}$$

3 Loi de probabilité de X :

x_i	13	15	20	26
Effectif	40	44	48	24
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{39}$	$\frac{11}{39}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{2}{13}$

Exercice 8 — Solution — Urne

1 Loi de probabilité de X :

x_i	-2	3	5
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{n}$	$\frac{2}{n}$	$\frac{n-7}{n}$

2 On gagne de l'argent si $X > 0$, c'est-à-dire si la boule est verte ou jaune.

$$P(X > 0) = \frac{2}{n} + \frac{n-7}{n} = \frac{n-5}{n} \geq 0{,}6$$

$$n - 5 \geq 0{,}6n \implies 0{,}4n \geq 5 \implies n \geq 12{,}5$$

Comme n est un entier, il faut $n \geq 13$.

Exercice 9 — Solution — Faut-il répondre au hasard ?

Il y a 4 propositions, donc $P(\text{bonne réponse}) = \dfrac{1}{4}$ et $P(\text{mauvaise réponse}) = \dfrac{3}{4}$.

1 Lois de probabilité et espérances :

a.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E(X) = 0 \times \frac{3}{4} + 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

b.

y_i	-1	3
$P(Y = y_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E(Y) = -1 \times \frac{3}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = 0$

c.

z_i	-1	2
$P(Z = z_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E(Z) = -1 \times \frac{3}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$

d.

w_i	-1	4
$P(W = w_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E(W) = -1 \times \frac{3}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

2 Il est intéressant de répondre au hasard si l'espérance est strictement positive. C'est le cas pour les barèmes **a** ($E(X) = \frac{1}{4} > 0$) et **d** ($E(W) = \frac{1}{4} > 0$). Pour le barème b, l'espérance est nulle (indifférent). Pour le barème c, l'espérance est négative : il vaut mieux s'abstenir.

Exercice 10 — Solution — Espérance

1 $E(X) = -3 \times 0{,}1 + 0 \times 0{,}4 + 2 \times 0{,}3 + 5 \times 0{,}2 = -0{,}3 + 0 + 0{,}6 + 1 = \mathbf{1{,}3}$

2 $E(Y) = -2 \times \dfrac{1}{6} + 1 \times \dfrac{1}{3} + 4 \times \dfrac{1}{4} + 6 \times \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} + 1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2} = \mathbf{2{,}5}$

Exercice 11 — Solution — Capteurs électroniques

Sur 200 capteurs : 190 sans défaut, 7 avec défaut de fonctionnement, 3 avec défaut de taille.

1 Les valeurs de X sont 10, 14 et 16 euros.

x_i	10	14	16
$P(X = x_i)$	$\frac{190}{200} = \frac{19}{20}$	$\frac{7}{200}$	$\frac{3}{200}$

2 L'espérance donne le coût moyen d'un capteur :

$$E(X) = 10 \times \frac{19}{20} + 14 \times \frac{7}{200} + 16 \times \frac{3}{200} = \frac{1900 + 98 + 48}{200} = \frac{2046}{200} = \frac{1023}{100} = 10{,}23 \text{ €}$$

3 Pour 1 000 000 de capteurs, le coût estimé est $1\,000\,000 \times 10{,}23 =$ **10 230 000** €.

Exercice 12 — Solution — Variance et écart type

Variable aléatoire de l'exercice 3a (X prenant les valeurs $-2, 1, 3$) :

$E(X) = -2 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$$V(X) = \left(-2 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(3 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{49}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{64}{9} \times \frac{1}{6} = \frac{29}{9} \approx 3{,}22$$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{29}{9}} \approx 1{,}80$

Variable aléatoire de l'exercice 10a (X prenant les valeurs $-3, 0, 2, 5$) :
$E(X) = 1{,}3$ (calculé à l'exercice 10)

$$V(X) = (-3 - 1{,}3)^2 \times 0{,}1 + (0 - 1{,}3)^2 \times 0{,}4 + (2 - 1{,}3)^2 \times 0{,}3 + (5 - 1{,}3)^2 \times 0{,}2$$

$$= 18{,}49 \times 0{,}1 + 1{,}69 \times 0{,}4 + 0{,}49 \times 0{,}3 + 13{,}69 \times 0{,}2 = 1{,}849 + 0{,}676 + 0{,}147 + 2{,}738 = 5{,}41$$

$\sigma(X) = \sqrt{5{,}41} \approx 2{,}33$

Exercice 13 — Solution — Dés — E3C sujet 2 2021

1 On lance deux dés classiques (faces 1 à 6). L'univers comporte 36 issues équiprobables.

a. Les valeurs prises par X sont les produits $i \times j$ possibles : $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36$.

b. Loi de probabilité de X :

x_i	1	2	3	4	5	6	8	9	10
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$

x_i	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

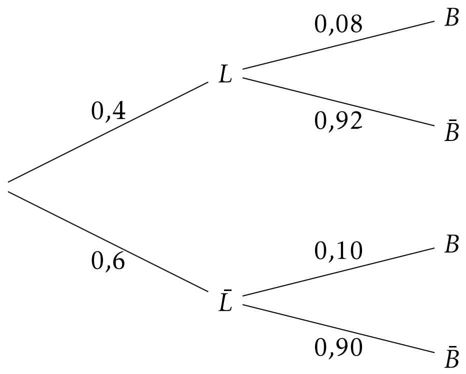
c. $P(X < 10) = P(X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}) = \frac{1 + 2 + 2 + 3 + 2 + 4 + 2 + 1}{36} = \frac{17}{36}$

2 Dé 1 : $\{1, 2, 2, 3, 3, 4\}$, Dé 2 : $\{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$, univers de 36 issues équiprobables.
On liste les produits $Y = i \times j < 10$: toutes les paires donnant un produit < 10.
En systématisant, on trouve également 17 issues avec $Y < 10$, donc $P(Y < 10) = \frac{17}{36}$.

3 Les deux jeux ont la même probabilité de gagner ($\frac{17}{36}$). Les deux jeux sont équivalents.

Partie A

1 Arbre pondéré complété :



2 $P(L \cap B) = P(L) \times P(B \mid L) = 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}032$

3 Par la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(L) \times P(B \mid L) + P(\bar{L}) \times P(B \mid \bar{L}) = 0{,}4 \times 0{,}08 + 0{,}6 \times 0{,}10 = 0{,}032 + 0{,}060 = 0{,}092$$

Partie B

1 X prend les valeurs 20 (membre BDS) et 60 (non membre BDS).

2 $P(X = 20) = P(B) = 0{,}092$ et $P(X = 60) = P(\bar{B}) = 0{,}908$.

x_i	20	60
$P(X = x_i)$	0,092	0,908

$$E(X) = 20 \times 0{,}092 + 60 \times 0{,}908 = 1{,}84 + 54{,}48 = 56{,}32 \text{ €}$$