Calculs avec exponentielle - Plan de travail

1G math – mai 2026

1 Manipulation algébrique

- ☐ Exercice 1: Simplifier des expressions

2 Équation inéquation

- ☐ Exercice 2: Simplifier des expressions avec une variable
- ☐ Exercice 3: Résoudre des équations

3 Dérivation

- ☐ Exercice 4: Résoudre des inéquations
- ☐ Exercice 5: Dériver des fonctions avec l'exponentielle
- ☐ Exercice 6: Sens de variation

4 Problèmes

- ☐ Exercice 7: Maths et randonnée
- ☐ Exercice 8: Pollution d'une rivière

Exercice 1 — Simplifier des expressions

Simplifier les expressions suivantes.

a) $e^{4} \times e^{-5}$

b) $e^{-1} \times e^{2} \times e^{0,5}$

c) $\left(e^{3}\right)^{2} \times e^{5}$

d) $\left(\dfrac{e^{-4}}{2}\right)^{3}$

e) $\dfrac{e^{-2} \times e^{9}}{e^{2}}$

f) $\dfrac{e^{4} \times \left(e^{2}\right)^{3}}{e^{-3}}$

Exercice 2 — Simplifier des expressions avec une variable

Simplifier les expressions suivantes, où x est un nombre réel.

a) $D(x) = e^{-x} \times e^{2x} \times e$

b) $E(x) = \dfrac{e^{4x}}{e^{5x-1}} \times e^{x}$

c) $F(x) = \dfrac{e^{x+1}}{\left(e^{5x}\right)^{2}}$

Exercice 3 — Résoudre des équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $e^{x+1} = e^{2}$

b) $e^{-x+3} = e$

c) $e^{2x-10} = 1$

Exercice 4 — Résoudre des inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $\mathrm{e}^{3x-5} > 1$ | b) $\mathrm{e}^{-3x+1} \leq \mathrm{e}$ | c) $\mathrm{e}^{2x+1} - \mathrm{e}^{2} < 0$

Exercice 5 — Dériver des fonctions avec l'exponentielle

Pour chaque fonction, déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité, puis calculer la dérivée.

1 $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x}$
2 $g(x) = x^2\,\mathrm{e}^{x}$
3 $h(x) = 2\,\mathrm{e}^{-3x+1} - 3x + 1$
4 $k(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{3x+1}$
5 $l : x \mapsto \dfrac{x+1}{\mathrm{e}^{x}}$
6 $m : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+1}$

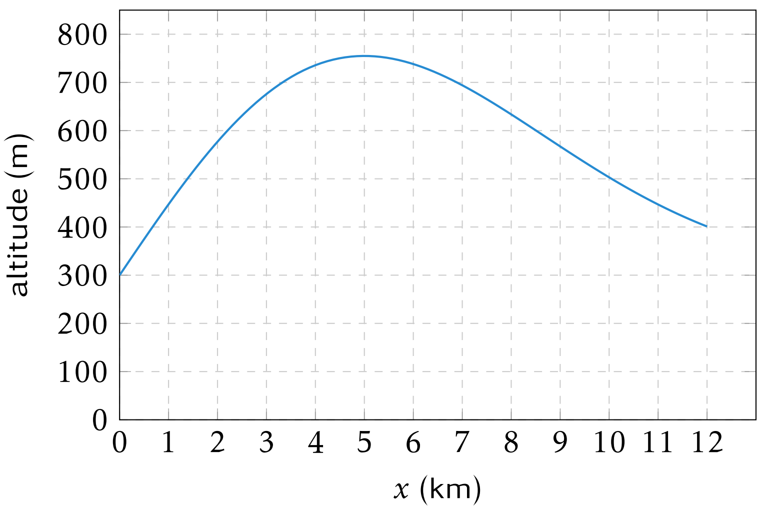
Exercice 6 — Sens de variation

Étudier le sens de variations des fonctions suivantes, toutes définies sur $\mathbb{R}$.

1 $f(x) = (x^2 - x)\,\mathrm{e}^{x+1}$
2 $g(x) = x^3\,\mathrm{e}^{x}$
3 $h(x) = -\dfrac{3}{\mathrm{e}^{x}+2}$
4 $k(x) = x - \mathrm{e}^{x} - 1$

Exercice 7 — Maths et randonnée

Une association propose des randonnées de 12 km sur des sentiers de montagne. La fonction f donne l'altitude du parcours (en mètres) en fonction de la distance parcourue x (en kilomètres) depuis le départ, pour $x \in [0\,;\,12]$.



A. Étude graphique — Répondre aux questions suivantes en vous appuyant sur le graphique.

1 À quelle altitude se situent les randonneurs après avoir parcouru 2 km ?
2 Dans la partie descendante, le guide a prévu une pause dans un refuge situé à 600 m d'altitude. Quelle distance auront-ils alors parcourus ?
3 À la fin du chemin de randonnée, les randonneurs seront-ils revenus à leur point de départ ?

B. Modélisation — On modélise le parcours par $f(x) = 150x\,\mathrm{e}^{-0{,}02x^2} + 300$ sur $[0\,;\,12]$.

1 Déterminer une expression de la dérivée f'.
2 Étudier le signe de f', puis dresser le tableau de variations de f.
3 Quelle sera l'altitude maximale atteinte ? (réponse arrondie au mètre près)

Exercice 8 — Pollution d'une rivière

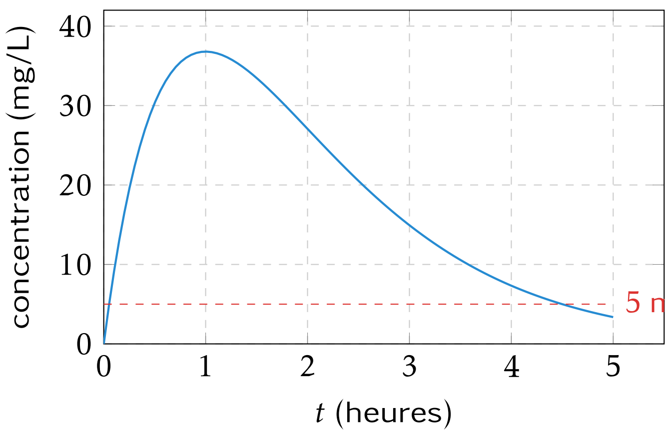
On considère la fonction P définie sur l'intervalle $[0\,;\,5]$ par $P(t) = 100t\,\mathrm{e}^{-t}$.

1 Calculer $P(0)$ et $P(5)$ (on arrondira à l'unité).
2 À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu que pour tout réel t de $[0\,;\,5]$, $P'(t) = 100(1-t)\,\mathrm{e}^{-t}$.
   a. Utiliser cette expression pour étudier le signe de $P'(t)$ sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction P sur $[0\,;\,5]$.

c. Pour quelle valeur de t la fonction P admet-elle un maximum ? Quelle est la valeur de ce maximum ? (on arrondira à l'unité).

3 Une station pompe l'eau d'une rivière pour la transformer en eau potable. Lors d'un épisode de pollution, il faut interrompre le pompage en attendant que la vague de pollution soit évacuée par le courant. On étudie ici un épisode de pollution ayant duré 5 heures environ.
La concentration en polluant, exprimée en milligrammes par litre (mg/L), est modélisée par la fonction P, où t est le temps écoulé depuis le début de l'alerte, exprimé en heures.



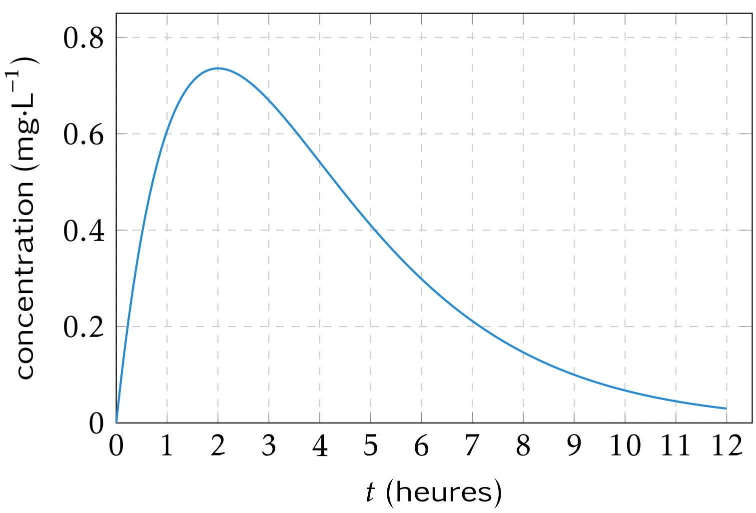
Les normes en vigueur indiquent que ce polluant devient dangereux pour la santé si sa concentration dépasse 5 mg/L.
Lors d'un épisode déclaré de pollution dans la rivière et après arrêt du pompage, à partir de combien d'heures peut-on considérer que la pollution ne représente plus de danger pour la santé ?

Exercice 9 Concentration d'un médicament

La concentration d'un médicament dans le sang, en mg·L^{-1}, au cours du temps t exprimé en heures, est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = t\,\mathrm{e}^{-0,5t}$$

dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



1 Calculer la valeur exacte de $f(4)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

2 On note f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$,

$$f'(t) = (1 - 0,5t)\,\mathrm{e}^{-0,5t}$$

3 Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

4 Déduire de la question précédente le tableau de variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

5 Quelle est la concentration maximale du médicament dans le sang ? On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.