Cercles - Équation par le produit scalaire

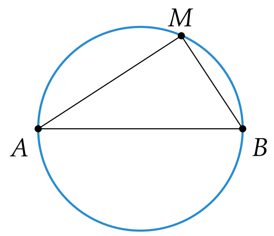
– juin 2026

1 Cercle de diamètre $[AB]$

Propriété: Caractérisation par le produit scalaire

Soient A et B deux points distincts du plan.
Un point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$



Idée Le triangle AMB est rectangle en M exactement lorsque M est sur le cercle de diamètre $[AB]$: les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont alors orthogonaux.

2 Étude d'un ensemble de points

Propriété: Transformation d'une expression

Étant donné deux points A et B et leur milieu I, on a

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

Démonstration

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

car I est le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$ et $IA = \dfrac{AB}{2}$.

Méthode: Déterminer un ensemble de points

Pour déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$, on transforme l'expression en $MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = k$ pour se ramener à une condition sur MI.

Exemple Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2$, où A et B sont tels que $AB = 8$.

À faire au crayon à papier

réaliser l'exemple