DS1

1G spé math – 18 septembre 2025

Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.

Exercice 1 — Solution — Automatismes

1. D'après le tableau de signe, $f(x) \leq 0$ lorsque
   $x \in]-\infty; -4] \cup [0; 2]$.
2. $4x + 12 = 3 + 6x$
   $4x - 6x = 3 - 12$
   $-2x = -9$
   $x = 4,5$
3. $A = 3x - 2x(x - 5)$
   $A = 3x - 2x \times x + 2x \times 5$
   $A = 3x - 2x^2 + 10x$
   $A = -2x^2 + 13x$
4. $B = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{3}\right)$
   Pour additionner les fractions, on trouve un dénominateur commun :
   $\dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{3 \times 3}{5 \times 3} + \dfrac{2 \times 5}{3 \times 5} = \dfrac{9}{15} + \dfrac{10}{15} = \dfrac{19}{15}$
   Donc $B = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{19}{15} = \dfrac{19}{45}$

Exercice 2 — Solution — Suites

1. La suite u est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par: $u_n = -3n + 7$
   (a) **Mode de génération :** La suite u est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $r = -3$.
   En effet, $u_n = u_0 + n \times r = 7 + n \times (-3) = -3n + 7$.
   (b) **Calculs :**
   $u_1 = -3 \times 1 + 7 = -3 + 7 = 4$
   $u_4 = -3 \times 4 + 7 = -12 + 7 = -5$
   (c) **Résolution de l'inéquation :** $u_n < -30$
   $-3n + 7 < -30$
   $-3n < -30 - 7$
   $-3n < -37$
   $n > \frac{37}{3}$ (on change le sens de l'inégalité car on divise par $-3 < 0$)
   $n > 12,33...$
   Comme $n \in \mathbb{N}$, on a $n \geq 13$.
   Donc $u_n < -30$ pour $n \geq 13$.
2. La suite v est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par: $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_n^2 + 1$
   (a) **Mode de génération :** La suite v est définie par récurrence avec un premier terme $v_0 = 1$ et une relation de récurrence $v_{n+1} = v_n^2 + 1$.
   (b) **Calculs :**
   $v_1 = v_0^2 + 1 = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$
   $v_2 = v_1^2 + 1 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$
   $v_3 = v_2^2 + 1 = 5^2 + 1 = 25 + 1 = 26$
   $v_4 = v_3^2 + 1 = 26^2 + 1 = 676 + 1 = 677$

Exercice 3 — Solution — Club de sport

- **Signification de n et justification de la formule :**
  n correspond au nombre d'années écoulées depuis 2021.
  - $n = 0$: année 2021 (300 membres)
  - $n = 1$: année 2022
  - $n = 2$: année 2023, etc.

  Justification de $u_{n+1} = 0,8u_n + 80$:
  Le nombre de membres l'année $(n + 1)$ est la somme de :
  - Les anciens membres qui renouvellent : 80% de u_n, soit $0,8u_n$
  - Les nouveaux membres : 80

  D'où $u_{n+1} = 0,8u_n + 80$.
- **Calculs et interprétations :**

$$u_1 = 0,8 \times 300 + 80 = 240 + 80 = 320 \quad (1)$$

En 2022, le club compte 320 membres.

$$u_2 = 0,8 \times 320 + 80 = 256 + 80 = 336 \quad (2)$$

En 2023, le club compte 336 membres.

$$u_3 = 0,8 \times 336 + 80 = 268,8 + 80 = 348,8 \quad (3)$$

En 2024, le club compte environ 349 membres.
Interprétation : Le nombre de membres augmente chaque année et tend vers un équilibre.
- **Méthode pour calculer u_{100} :**
  Avec un tableur :
  - Cellule A1 : 0, Cellule B1 : 300
  - Cellule A2 : =A1+1, Cellule B2 : =0.8*B1+80
  - Recopier jusqu'à la ligne 101
  - B101 donnera u_{100}

  Avec un programme Python :

Exercice 4 — Solution — Carrelage hexagonal

1. **Modélisation avec une suite :**
   Soit u_n le nombre de carreaux nécessaires pour réaliser l'étape n.
   D'après l'énoncé :
   - $u_0 = 1$ (carreau central)
   - $u_1 = 6$ (6 carreaux pour entourer le centre)
   - $u_2 = 12$ (12 carreaux pour entourer la forme précédente)
   - $u_3 = 18$ (18 carreaux pour entourer la forme précédente)

   Justification : À chaque étape $n \geq 1$, on ajoute une couronne hexagonale autour de la forme précédente.
   Dans un pavage hexagonal, chaque couronne de rang n est composée de 6 côtés de longueur $n + 1$, or pour ne pas compter les angles deux fois, il faut soustraire 6. Soit $6 \times (n + 1) - 6 = 6n$ carreaux.
   Par exemple :
   - Étape 1 : couronne de rang 1, soit $6 \times 1 = 6$ carreaux
   - Étape 2 : couronne de rang 2, soit $6 \times 2 = 12$ carreaux

- Étape 3 : couronne de rang 3, soit $6 \times 3 = 18$ carreaux

Formule : La suite (u_n) est définie par :

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 6n & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

où u_n représente le nombre de carreaux nécessaires pour réaliser l'étape n.

2. **Étape nécessitant plus de 100 carreaux :**
   On cherche n tel que $u_n > 100$.
   Pour $n \geq 1$, on a $u_n = 6n$.
   $6n > 100 \Rightarrow n > \frac{100}{6} \approx 16,67$
   Donc $n \geq 17$.
   Vérification :
   - $u_{16} = 6 \times 16 = 96 < 100$
   - $u_{17} = 6 \times 17 = 102 > 100$

   Le carreleur peut être à l'étape 17 (ou plus).