DS4 Solution

1G math – 04 décembre 2025

Exercice 1 — Solution — Automatismes

1 Le taux d'évolution est donné par $t = \dfrac{50-30}{30} = \dfrac{20}{30} = \dfrac{2}{3}$.

2 Le coefficient multiplicateur associé à une réduction de $15\,\%$ est $1 - 0{,}15 = 0{,}85$.
Le nouveau prix est donc $90 \times 0{,}85 = 90 \times \dfrac{85}{100} = \dfrac{90 \times 85}{100} = \dfrac{7650}{100} = 76{,}5$€.

3 a. $49 - 9x^2 = 7^2 - (3x)^2 = (7-3x)(7+3x)$

b. $-10x + x^2 + 25 = x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$

4 a. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

b. $\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

5 On remplace les valeurs dans l'expression :

$F = -2 + \dfrac{\frac{2}{3}+3}{\frac{1}{5}} = -2 + \dfrac{\frac{2}{3}+\frac{9}{3}}{\frac{1}{5}} = -2 + \dfrac{\frac{11}{3}}{\frac{1}{5}}$

$F = -2 + \frac{11}{3} \times 5 = -2 + \frac{55}{3} = \frac{-6+55}{3} = \frac{49}{3}$

Exercice 2 — Solution — mensuel

1 Une progression de $2\,\%$ correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + 0{,}02 = 1{,}02$.
Ainsi $u_1 = 1{,}02 \times u_0 = 1{,}02 \times 1200 = 1224$ et $u_2 = 1{,}02 \times u_1 = 1{,}02 \times 1224 = 1248{,}48$.
Durant le 2e mois après le lancement, environ 1248 exemplaires seront vendus.

2 Chaque mois, le nombre de mensuels vendus est multiplié par $1{,}02$.
La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 1{,}02$ et de premier terme $u_0 = 1200$.

3 Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 1200 \times 1{,}02^n$.

4 $u_{12} = 1200 \times 1{,}02^{12} \approx 1521{,}5$.
Le 12e mois après l'opération, environ 1522 mensuels seront vendus.

5 Programme complété :
python def seuil(): u = 1200 n = 0 while u < 2000: n = n + 1 u = u * 1.02 return n

Exercice 3 — Solution — Nature de suite

1 Calculons les trois premiers termes :
$u_0 = 4 - 5 \times 0 = 4$
$u_1 = 4 - 5 \times 1 = -1$
$u_2 = 4 - 5 \times 2 = -6$
On observe que $u_1 - u_0 = -1 - 4 = -5$ et $u_2 - u_1 = -6 - (-1) = -5$.
La suite semble arithmétique de raison -5.
Démontrons-le : $u_{n+1} - u_n = (4 - 5(n+1)) - (4 - 5n) = 4 - 5n - 5 - 4 + 5n = -5$
La différence entre deux termes consécutifs est constante, donc (u_n) est arithmétique de raison $r = -5$.

2 Calculons les trois premiers termes :

$w_0 = \dfrac{100}{2^0} = \dfrac{100}{1} = 100$

$w_1 = \dfrac{100}{2^1} = \dfrac{100}{2} = 50$

$w_2 = \dfrac{100}{2^2} = \dfrac{100}{4} = 25$

On observe que $\dfrac{w_1}{w_0} = \dfrac{50}{100} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{w_2}{w_1} = \dfrac{25}{50} = \dfrac{1}{2}$.

La suite semble géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

Démontrons-le : $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{\frac{100}{2^{n+1}}}{\frac{100}{2^n}} = \dfrac{100}{2^{n+1}} \times \dfrac{2^n}{100} = \dfrac{2^n}{2^{n+1}} = \dfrac{2^n}{2^n \times 2} = \dfrac{1}{2}$

Le quotient de deux termes consécutifs est constant, donc (w_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 4 — Solution — Etude de fonction

1 Le taux de variation de f entre 2 et 6 est :
$\dfrac{f(6)-f(2)}{6-2} = \dfrac{(36-6+3)-(4-2+3)}{4} = \dfrac{33-5}{4} = \dfrac{28}{4} = 7$
Graphiquement, ce taux représente le coefficient directeur de la droite passant par les points de la courbe d'abscisses 2 et 6.

2 a. Le taux de variation de f entre 2 et $2+h$ est :
$\dfrac{f(2+h)-f(2)}{(2+h)-2} = \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$
Or $f(2+h) = (2+h)^2 - (2+h) + 3 = 4 + 4h + h^2 - 2 - h + 3 = h^2 + 3h + 5$
et $f(2) = 5$.
Ainsi $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{h^2+3h+5-5}{h} = \dfrac{h^2+3h}{h} = \dfrac{h(h+3)}{h} = h+3$

b. Le nombre dérivé de f en 2 est la limite du taux de variation quand h tend vers 0 :
$f'(2) = \lim_{h\to 0}(h+3) = 3$
Graphiquement, $f'(2) = 3$ représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.

c. L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est :
$y = f'(2)(x-2) + f(2) = 3(x-2) + 5 = 3x - 6 + 5 = 3x - 1$

3 a. Le taux de variation de g entre 1 et $1+h$ est :
$\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h}$
Or $g(1+h) = \dfrac{5}{(1+h)+1} = \dfrac{5}{2+h}$ et $g(1) = \dfrac{5}{2}$.
Ainsi $\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h} = \dfrac{\frac{5}{2+h} - \frac{5}{2}}{h} = \dfrac{\frac{10-5(2+h)}{2(2+h)}}{h} = \dfrac{\frac{10-10-5h}{2(2+h)}}{h}$
$= \dfrac{\frac{-5h}{2(2+h)}}{h} = \dfrac{-5h}{2(2+h)h} = \dfrac{-5}{2(2+h)}$

b. $g'(1) = \lim_{h\to 0} \dfrac{-5}{2(2+h)} = \dfrac{-5}{2\times 2} = \dfrac{-5}{4}$

Exercice 5 — Solution — Etude graphique

1 Le nombre dérivé $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse -1.
On lit graphiquement que cette tangente passe par les points $(-1;3)$ et $(0;-1)$.
Ainsi $f'(-1) = \dfrac{-1-3}{0-(-1)} = \dfrac{-4}{1} = -4$
De même, la tangente au point d'abscisse 4 passe par les points $(4;8)$ et $(3;2)$.
Ainsi $f'(4) = \dfrac{2-8}{3-4} = \dfrac{-6}{-1} = 6$

2 On a $f(2) = 2\times(2-2) = 0$, donc le point de tangence est $(2;0)$.
La tangente a pour coefficient directeur $f'(2) = 2$.
En partant du point $(2;0)$, on se déplace de 1 unité vers la droite et de 2 unités vers le haut pour obtenir le point $(3;2)$.
La tangente passe donc par les points $(2;0)$ et $(3;2)$.