DS5 Solution

1G math – 08 janvier 2026

Exercice 1 — Solution — Automatismes

1 La droite passe par le point $(0;1)$ donc l'ordonnée à l'origine est 1.
Entre les points $(0;1)$ et $(2;2)$, on observe que lorsque x augmente de 2, y augmente de 1. Le coefficient directeur est donc $\frac{1}{2}$.

L'équation de la droite est donc $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Réponse : c

2 La vitesse moyenne est donnée par $v = \frac{d}{t}$.

Ici, $d = 6$ km et $t = 1\text{h}12\text{min} = 1 + \frac{12}{60} = 1,2$ h.

Donc $v = \frac{6}{1,2} = 5$ km/h.

Réponse : a

3 Soit P le prix initial. Après une réduction de 50%, le prix devient $P \times 0,5$.
Après une augmentation de 50%, le prix devient $P \times 0,5 \times 1,5 = P \times 0,75$.
Cela correspond à une réduction de 25%.

Réponse : b

4 Le prix est multiplié par $0,925 = 1 - 0,075$.
Cela correspond à une baisse de $7,5\%$.

Réponse : a

5 $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos\left(\widehat{(\vec{u};\vec{v})}\right)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 7 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 28 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -14$

Réponse : a

Exercice 2 — Solution — Géométrie

1 En utilisant la relation de Chasles en passant par A :
$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN}$
Or $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ d'après l'énoncé.

Donc $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

2 En utilisant la relation de Chasles en passant par B :
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$
Or $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ d'après l'énoncé.

Donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

3 Calculons $\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{AM}$ en utilisant les décompositions précédentes.

$$\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{AM} = \left(\overrightarrow{DA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}\right)$$

En développant ce produit scalaire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} \cdot \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{9}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

Simplifions chaque terme en utilisant les propriétés du carré ABCD :

- $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ car les côtés $[DA]$ et $[AB]$ sont perpendiculaires dans le carré.
- $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AD}$ car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ (côtés opposés du carré). Or $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = -||\overrightarrow{AD}||^2 = -c^2$ où c est le côté du carré.
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = ||\overrightarrow{AB}||^2 = c^2$.
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ car les côtés $[AB]$ et $[BC]$ sont perpendiculaires dans le carré.

D'où :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{AM} &= 0 + \frac{3}{2} \times (-c^2) + \frac{3}{2} \times c^2 + \frac{9}{4} \times 0 \\
&= -\frac{3}{2}c^2 + \frac{3}{2}c^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

4 Comme $\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{DN}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux, donc les droites (DN) et (AM) sont perpendiculaires.

Exercice 3 — Solution — Démonstration de la formule d'Al-Kashi

1 La formule d'Al-Kashi s'énonce ainsi : dans un triangle ABC,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

2 CF cours

3 Application numérique :

On a $AB = 8$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{6}$.

D'après la formule d'Al-Kashi :

$$\begin{aligned}
BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&= 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= 64 + 25 - 40\sqrt{3} \\
&= 89 - 40\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Donc $BC = \sqrt{89 - 40\sqrt{3}} \approx 4,15$ (en unités de longueur).

Exercice 4 — Solution — Dérivation

1 $f(x) = -x^2 + x - 100$

$f'(x) = -2x + 1$

2 $g(x) = 4x^3 + x^2 - 10$

$g'(x) = 12x^2 + 2x$

3 $h(x) = -x^2 + \dfrac{1}{x} + 10 = -x^2 + x^{-1} + 10$

$h'(x) = -2x - x^{-2} = -2x - \dfrac{1}{x^2}$

Exercice 5 — Solution — Etude des variations des polynômes

1 Calcul de $B(0)$ et $B(100)$:
$B(0) = -51 \times 0^2 + 4590 \times 0 - 1000 = -1000$ euros
$B(100) = -51 \times 100^2 + 4590 \times 100 - 1000 = -510000 + 459000 - 1000 = -52000$ euros
Interprétation : Quand l'entreprise ne produit aucun canapé, elle perd 1000 euros (charges fixes). Quand elle produit 100 canapés, elle perd 52000 euros (surproduction).

2 Calcul de la dérivée :
$B(x) = -51x^2 + 4590x - 1000$
$B'(x) = -102x + 4590$

3 Étude du signe de $B'(x)$:
$B'(x) = -102x + 4590 = 0 \Leftrightarrow -102x = -4590 \Leftrightarrow x = \dfrac{4590}{102} = 45$
Comme le coefficient de x est négatif ($-102 < 0$), $B'(x)$ est positif avant 45 et négatif après.
Tableau de signes de $B'(x)$:

x	0		45		100
$B'(x)$		+	0	−	

Tableau de variations de $B(x)$:

x	0		45		100
$B(x)$			$B(45)$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	-1000				-52000

Avec $B(45) = -51 \times 45^2 + 4590 \times 45 - 1000 = -103275 + 206550 - 1000 = 102275$ euros.

4 Vérification des affirmations :

a. **Faux.** Le maximum de $B(x)$ est atteint pour $x = 45$ (et non $x = 50$).
b. **Vrai.** D'après le tableau de variations, $B(x)$ est croissante sur $[0\,;45]$, donc en particulier entre 10 et 40 canapés.
c. **Faux.** Calculons $B(80)$:
$B(80) = -51 \times 80^2 + 4590 \times 80 - 1000 = -326400 + 367200 - 1000 = 39800$ euros
Le bénéfice est positif, donc l'entreprise gagne de l'argent (elle ne perd pas).