DS6 Solution

1G math – 29 janvier 2026

Attention – Document généré par IA

Ce document a été essentiellement généré par une intelligence artificielle (LLM) et relu dans les grandes lignes. Des erreurs, des approximations ou des méthodes inhabituelles peuvent être présentes.

Restez critique face au contenu proposé et ne le considérez pas comme une vérité absolue.

Exercice 1 — Solution — automatismes

1 **Réponse a)** : $f(x) = -2x + 6$
La fonction s'annule en $x = 3$ donc $f(3) = 0$. On vérifie : $-2 \times 3 + 6 = 0$ ☒
La fonction est positive avant 3 et négative après, donc elle est décroissante, ce qui correspond à un coefficient directeur négatif.

2 **Réponse d)** : $P_U(V) = 0{,}30$
Calculons chaque probabilité :

- $P_V(U) = \frac{P(U \cap V)}{P(V)} = \frac{12/80}{48/80} = \frac{12}{48} = 0{,}25$
- $P(U \cap V) = \frac{12}{80} = 0{,}15$
- $P(U \cup V) = P(U) + P(V) - P(U \cap V) = \frac{40}{80} + \frac{48}{80} - \frac{12}{80} = \frac{76}{80} = 0{,}95$
- $P_U(V) = \frac{P(U \cap V)}{P(U)} = \frac{12/80}{40/80} = \frac{12}{40} = 0{,}30$ ☒

3 **Réponse c)** : $P_1 < P$
Après une hausse de 10% : $P \times 1{,}1$
Après une baisse de 10% : $P \times 1{,}1 \times 0{,}9 = P \times 0{,}99$
Donc $P_1 = 0{,}99P < P$

4 **Réponse c)** : $\sqrt{2}$
$\sqrt{18} + 3\sqrt{2} - \sqrt{50} = \sqrt{9 \times 2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{25 \times 2}$
$= 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = (3 + 3 - 5)\sqrt{2} = \sqrt{2}$

5 **Réponse a)** : $f'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x^2}$
$f(x) = 2x^3 + \frac{-2}{x} = 2x^3 - 2x^{-1}$
$f'(x) = 2 \times 3x^2 - 2 \times (-1)x^{-2} = 6x^2 + 2x^{-2} = 6x^2 + \frac{2}{x^2}$

6 **Réponse a)** : $y = 2x - 8$
Pour trouver l'équation de la tangente, on utilise : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
Calculons d'abord $f(3)$:
$f(3) = 3^2 - 4 \times 3 + 1 = 9 - 12 + 1 = -2$
Calculons ensuite $f'(x)$:
$f'(x) = 2x - 4$
Donc $f'(3) = 2 \times 3 - 4 = 2$
L'équation de la tangente est donc :
$y = 2(x - 3) + (-2) = 2x - 6 - 2 = 2x - 8$

Exercice 2 — Solution — Géométrie

1 a. Coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{OI} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b. Produit scalaire :
$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OC} = 4 \times 0 + 3 \times 4 = 0 + 12 = 12$

2 a. Le point H est le projeté orthogonal de C sur (OI), donc :
$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OC} = \mathrm{OH} \times \mathrm{OI}$

b. Longueur OI :
$\mathrm{OI} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

c. D'après la question précédente :
$12 = \mathrm{OH} \times 5$
Donc $\mathrm{OH} = \frac{12}{5} = 2{,}4$

3 Calcul de $\cos(\widehat{IOC})$:
On utilise la formule : $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OC} = \mathrm{OI} \times \mathrm{OC} \times \cos(\widehat{IOC})$
On a : $\mathrm{OC} = 4$ (côté du carré)
Donc : $12 = 5 \times 4 \times \cos(\widehat{IOC})$
$12 = 20 \times \cos(\widehat{IOC})$
$\cos(\widehat{IOC}) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

Exercice 3 — Solution — Polynômes

Résolvons $2x^2 - 12x + 18 \leq 0$.
Factorisons d'abord $2x^2 - 12x + 18$:
$2x^2 - 12x + 18 = 2(x^2 - 6x + 9)$
Cherchons les racines de $x^2 - 6x + 9$:
$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 36 - 36 = 0$
Il y a une racine double : $x_0 = \frac{6}{2} = 3$
Donc $2x^2 - 12x + 18 = 2(x-3)^2$
L'inéquation devient : $2(x-3)^2 \leq 0$
Or $(x-3)^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (un carré est toujours positif).
Donc $2(x-3)^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
L'inéquation $2(x-3)^2 \leq 0$ n'est vérifiée que lorsque $2(x-3)^2 = 0$, c'est-à-dire quand $x = 3$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$2x^2 - 12x + 18$		+	0	+	

Donc $S = \{3\}$

Exercice 4 — Solution — Polynômes

1 Coût de fabrication de 20 boîtes :
$C(20) = 20^2 + 4 \times 20 + 300 = 400 + 80 + 300 = 780$ €

2 La recette pour x boîtes vendues à 50 € l'unité est :
$R(x) = 50x$

3 Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût :
$B(x) = R(x) - C(x) = 50x - (x^2 + 4x + 300)$
$B(x) = 50x - x^2 - 4x - 300 = -x^2 + 46x - 300$

4 Bénéfice pour 20 boîtes :
$B(20) = -20^2 + 46 \times 20 - 300 = -400 + 920 - 300 = 220$ €

5 L'artisan est rentable quand $B(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire $-x^2 + 46x - 300 \geqslant 0$.
Cherchons les racines de $-x^2 + 46x - 300$:
$\Delta = 46^2 - 4 \times (-1) \times (-300) = 2116 - 1200 = 916$
On utilise la valeur approchée : $\sqrt{916} \approx 30$
$x_1 = \frac{-46-30}{-2} = \frac{-76}{-2} = 38$
$x_2 = \frac{-46+30}{-2} = \frac{-16}{-2} = 8$
Le coefficient de x^2 est négatif, donc le polynôme est positif entre les racines.

x	$-\infty$		8		38		$+\infty$
$-x^2 + 46x - 300$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'artisan doit fabriquer entre 8 et 38 boîtes pour être rentable.
Donc $S = [8; 38]$