Intervalles - Solutions

2nd – mars 2026

> **Attention – Document généré par IA**
>
> Ce document a été essentiellement généré par une intelligence artificielle (LLM) et relu dans les grandes lignes. Des erreurs, des approximations ou des méthodes inhabituelles peuvent être présentes.
>
> **Restez critique face au contenu proposé et ne le considérez pas comme une vérité absolue.**

Exercice 1 — Solution — Inéquation graphique

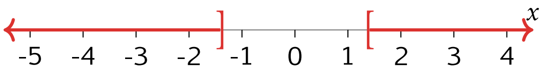
1 Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 1$

a. Sur le graphique, on cherche les valeurs de x pour lesquelles la courbe est au-dessus ou sur la droite horizontale $y = 1$.
On observe que $f(x) = x^2 - 1 \geq 1$ lorsque $x^2 \geq 2$, c'est-à-dire pour $x \leq -\sqrt{2}$ ou $x \geq \sqrt{2}$.
L'ensemble des solutions est : $\left]-\infty\,;-\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}\,;+\infty\right[$
Avec $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

b. $f(x)$ est plus petit ou égal à 1 lorsque x est plus grand que $-\sqrt{2}$ et plus petit que $\sqrt{2}$.

c. $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ si et seulement si $f(x) \leq 1$

d. Représentation sur l'axe :



2 Pour l'inéquation $f(x) > 1$:

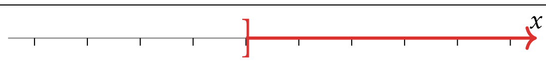
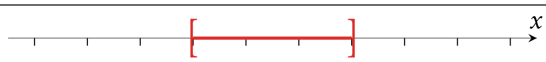
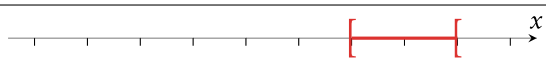
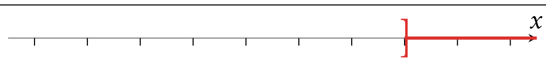
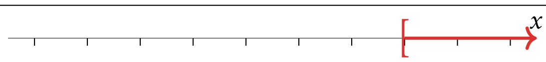
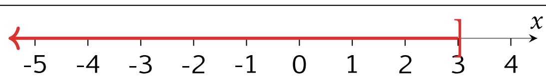
a. L'ensemble des solutions est : $\left]-\infty\,;-\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}\,;+\infty\right[$

b. Les valeurs de x sont les mêmes mais on ne retient pas $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

c. Même représentation mais avec des crochets ouverts.

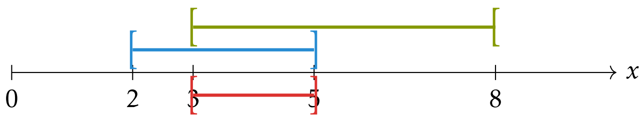
3 La différence entre $f(x) \geq 1$ et $f(x) > 1$ est que dans le premier cas, les valeurs $x = -\sqrt{2}$ et $x = \sqrt{2}$ font partie des solutions (crochets fermés [et]), alors que dans le second cas, elles n'en font pas partie (crochets ouverts] et [).

Exercice 2 — Solution — Représentation d'intervalles

En français	Inégalité	sur la droite	Notation
Ensemble des réels strictement plus grand que -1	$x > -1$		$x \in \left]-1\,;+\infty\right[$
Ensemble des réels plus grands ou égaux à -2 et plus petits ou égaux à 1	$-2 \leq x \leq 1$		$x \in [-2\,;1]$
Ensemble des réels plus grands ou égaux à 1 et strictement plus petits que 3	$1 \leq x < 3$		$x \in [1\,;3[$
Ensemble des réels strictement plus grands que 2 et strictement plus petits que 5	$2 < x < 5$		$x \in]2\,;5[$
Ensemble des réels plus grands ou égaux à 2	$x \geq 2$		$x \in [2\,;+\infty[$
Ensemble des réels plus petits ou égaux à 3	$x \leq 3$		$x \in]-\infty\,;3]$

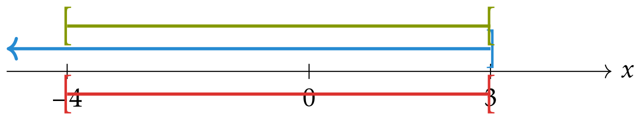
Exercice 3 — Solution — Union et intersection

1 $[2\,;5] \cap [3\,;8[$: l'intersection correspond aux valeurs communes aux deux intervalles.



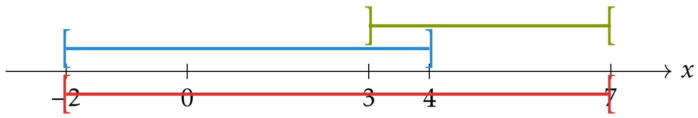
$[2\,;5] \cap [3\,;8[\; = [3\,;5[$

2 $]-\infty\,;3] \cap [-4\,;3[$:



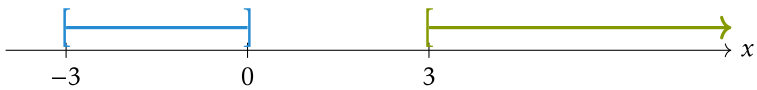
$]-\infty\,;3] \cap [-4\,;3[\; = [-4\,;3[$

3 $[-2\,;4] \cup]3\,;7[$: l'union regroupe toutes les valeurs des deux intervalles.



Les intervalles se chevauchent, donc : $[-2\,;4] \cup]3\,;7[\; = [-2\,;7[$

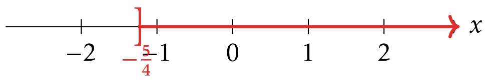
4 $[-3\,;0] \cup [3\,;+\infty[$:



Les intervalles ne se touchent pas : pas de simplification possible.
$[-3\,;0] \cup [3\,;+\infty[$

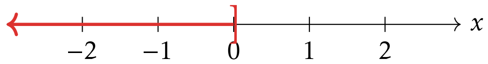
Exercice 4 — Solution — Inéquations

1 $4x + 5 > 0$
$4x > -5$
$x > -\dfrac{5}{4}$



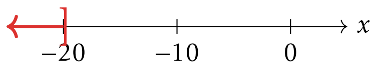
$S = \left]-\dfrac{5}{4}\,;+\infty\right[$

2 $-4x + 5 \geq 5$
$-4x \geq 0$
$x \leq 0$ (on divise par -4 donc on change le sens de l'inégalité)



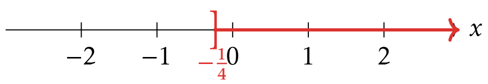
$S = \,]-\infty\,;0]$

3 $0{,}3x + 4 \leq 0{,}1x$
$0{,}2x \leq -4$
$x \leq -20$



$S = \,]-\infty\,;-20]$

4 $-8x + 5 < 7$
$-8x < 2$
$x > -\dfrac{1}{4}$



$S = \left]-\dfrac{1}{4}\,;+\infty\right[$

Exercice 5 — Solution — Équations et tableaux

1. $f(x) \leq 0$: on cherche où la fonction est négative ou nulle.
   D'après le tableau, $f(x)$ est négative entre 1 et 2.
   $S = [1\,;2]$
2. $g(x) < 0$: on cherche où la fonction est strictement négative.
   D'après le tableau, $g(x)$ est négative entre $-\infty$ et 0, et entre 10 et $+\infty$.
   $S =]-\infty\,;0[\cup]10\,;+\infty[$
3. $z(t) > 0$: on cherche où la fonction est strictement positive.
   D'après le tableau, $z(t)$ est positive entre -5 et -1, et entre 3 et 4.
   $S =]-5\,;-1[\cup]3\,;4[$
4. $z(t) \leq 0$: on cherche où la fonction est négative ou nulle.
   D'après le tableau, $z(t)$ est négative ou nulle entre 0 et 1, entre 2 et 3, et après 4.
   $S = [0\,;1] \cup [2\,;3] \cup [4\,;+\infty[$

Exercice 6 — Solution — Inéquation graphique le retour!

On utilise le graphique pour résoudre les inéquations. La fonction f est en rouge (parabole $f(x) = x^2 - 1$) et h est en bleu (exponentielle $h(x) = e^x - 2$).

1. $f(x) < 3$: on cherche où la courbe rouge est en dessous de la droite $y = 3$.
   La parabole $f(x) = x^2 - 1 = 3$ donne $x^2 = 4$, donc $x = -2$ ou $x = 2$.
   $S =]-2\,;2[$
2. $f(x) \geq 0$: on cherche où la courbe rouge est au-dessus ou sur l'axe des abscisses.
   $f(x) = x^2 - 1 = 0$ donne $x = -1$ ou $x = 1$.
   $S =]-\infty\,;-1] \cup [1\,;+\infty[$
3. $h(x) > 0$: on cherche où la courbe bleue est au-dessus de l'axe des abscisses.
   $h(x) = e^x - 2 = 0$ donne $e^x = 2$, donc $x = \ln(2) \approx 0{,}69$.
   $S =]\ln(2)\,;+\infty[$ ou approximativement $S \approx]0{,}69\,;+\infty[$
4. $h(x) < f(x)$: on cherche où la courbe bleue est en dessous de la courbe rouge.
   Graphiquement, on observe que h est sous f pour x entre environ $-0{,}7$ et $1{,}3$.
   $S \approx]-0{,}7\,;1{,}3[$
5. $h(x) \geq -2$: on cherche où la courbe bleue est au-dessus ou sur la droite $y = -2$.
   $h(x) = e^x - 2 = -2$ donne $e^x = 0$, ce qui est impossible. Comme $e^x > 0$, on a toujours $h(x) > -2$.
   $S = \mathbb{R}$ ou $]-\infty\,;+\infty[$

Exercice 7 — Solution — Inéquation graphique

On utilise le graphique avec les fonctions g (verte, droite $g(x) = -0{,}5x + 1$) et h (bleue, hyperbole $h(x) = \frac{1}{x}$).

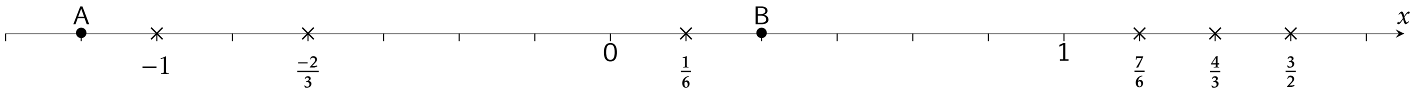
1. $g(x) \leq 1$: on cherche où la droite verte est en dessous ou sur la droite $y = 1$.
   $g(x) = -0{,}5x + 1 = 1$ donne $x = 0$.
   Comme g est décroissante, $g(x) \leq 1$ pour $x \geq 0$.
   $S = [0\,;+\infty[$
2. $g(x) > 0$: on cherche où la droite verte est au-dessus de l'axe des abscisses.
   $g(x) = -0{,}5x + 1 = 0$ donne $x = 2$.
   $S =]-\infty\,;2[$
3. $h(x) < g(x)$: on cherche où la courbe bleue est en dessous de la droite verte.
   Les courbes se coupent en deux points. Graphiquement, h est sous g pour x entre environ $-1{,}6$ et 0 (exclu car h n'existe pas en 0), et pour $x > 0{,}6$ environ.
   $S \approx]-1{,}6\,;0[\cup]0{,}6\,;+\infty[$
4. $h(x) \geq 0$: on cherche où la courbe bleue est au-dessus ou sur l'axe des abscisses.
   $h(x) = \frac{1}{x} \geq 0$ lorsque $x > 0$.
   $S =]0\,;+\infty[$

Exercice 8 — Solution — Droite des réels

Sur la droite graduée donnée : 0 correspond à la position 8, et 1 correspond à la position 14. Donc une unité correspond à 6 graduations.

1 Représentation des nombres :

- -1 : 6 graduations à gauche de 0 → position 2
- $\frac{1}{6}$: 1 graduation à droite de 0 → position 9
- $\frac{-2}{3}$: 4 graduations à gauche de 0 → position 4
- $\frac{3}{2}$: 9 graduations à droite de 0 → position 17
- $\frac{7}{6}$: 7 graduations à droite de 0 → position 15
- $\frac{4}{3}$: 8 graduations à droite de 0 → position 16



2 Point A (position 1) : $1 - 8 = -7$ graduations, donc $A = \frac{-7}{6}$

Point B (position 10) : $10 - 8 = 2$ graduations, donc $B = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

3 L'ensemble des points à une distance strictement inférieure à $\frac{1}{2}$ du point $B = \frac{1}{3}$:

Distance de $\frac{1}{2} = 3$ graduations.

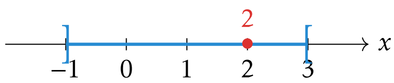
Les points sont entre $B - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$ et $B + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

$S = \left]-\frac{1}{6} ; \frac{5}{6}\right[$

Exercice 9 — Solution — Appartenance

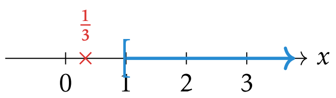
a) $2 \in]-1;3[$

Car $-1 < 2 < 3$, le nombre 2 est bien dans l'intervalle ouvert $]-1;3[$.



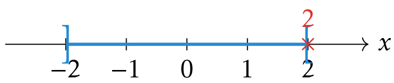
b) $\frac{1}{3} \notin [1;3[$

Car $\frac{1}{3} < 1$, le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas dans l'intervalle $[1;3[$ qui commence à 1.



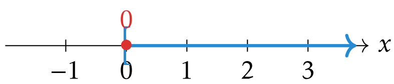
c) $2 \notin]-2;2[$

Car l'intervalle est ouvert en 2, la borne 2 n'appartient pas à l'intervalle.



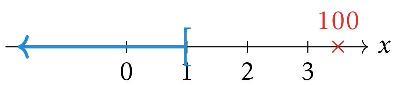
d) $0 \in [0;+\infty[$

Car l'intervalle est fermé en 0, la borne 0 appartient à l'intervalle.



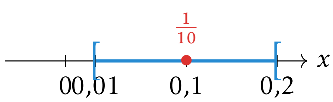
e) $100 \notin]-\infty;1[$

Car $100 > 1$, le nombre 100 n'est pas dans l'intervalle des nombres strictement inférieurs à 1.



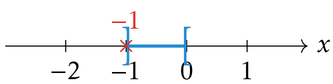
f) $\frac{1}{10} \in [0{,}01;0{,}2[$

Car $0{,}01 \leq 0{,}1 < 0{,}2$, le nombre $\frac{1}{10} = 0{,}1$ appartient à l'intervalle.



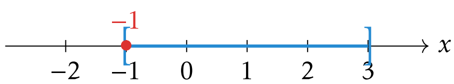
g) $-1 \notin]-1;0[$

Car l'intervalle est ouvert en -1, la borne -1 n'appartient pas à l'intervalle.



h) $\frac{-3}{3} \in [-1;3]$

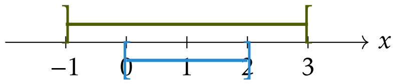
Car $-1 = \frac{-3}{3}$ et $-1 \leq -1 \leq 3$, le nombre -1 appartient à l'intervalle fermé.



Un intervalle A est inclus dans un intervalle B (noté $A \subset B$) si tous les éléments de A sont aussi dans B.

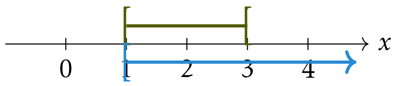
a) $[0\,;2] \subset \,]-1\,;3[$

Car $-1 < 0 < 2 < 3$, tous les éléments de $[0\,;2]$ (en bleu) sont dans $]-1\,;3[$ (en vert).



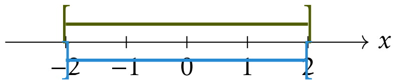
b) $[1\,;3[\; \not\subset [1\,;3]$

Car 3 n'est pas dans $[1\,;3]$ (il faut $x < 3$), mais l'intervalle $[1\,;3[$ va jusqu'à $+\infty$. En fait c'est l'inverse : $[1\,;3] \subset [1\,;3[$.



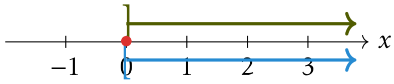
c) $]-2\,;2[\; \subset [-2\,;2]$

Car tous les éléments de l'intervalle ouvert $]-2\,;2[$ (en bleu) sont strictement entre -2 et 2, donc dans l'intervalle fermé $[-2\,;2]$ (en vert).



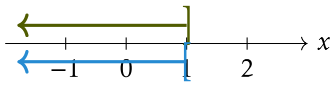
d) $[0\,;+\infty[\; \not\subset \,]0\,;+\infty[$

Car 0 est dans $[0\,;+\infty[$ (crochet fermé) mais pas dans $]0\,;+\infty[$ (crochet ouvert).



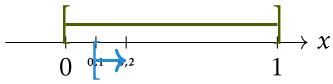
e) $]-\infty\,;1[\; \subset \,]-\infty\,;1]$

Car tous les éléments strictement inférieurs à 1 (bleu) sont aussi inférieurs ou égaux à 1 (vert).



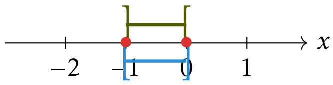
f) $[0{,}1\,;0{,}2[\; \subset [0\,;1]$

Car $0 \leq 0{,}1 < 0{,}2 < 1$, l'intervalle $[0{,}1\,;0{,}2[$ (bleu) est bien inclus dans $[0\,;1]$ (vert).



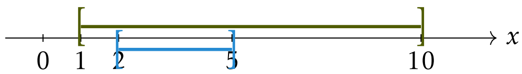
g) $[-1\,;0] \not\subset \,]-1\,;0[$

Car -1 et 0 sont dans $[-1\,;0]$ (crochet fermés en bleu) mais pas dans $]-1\,;0[$ (crochets ouverts en vert).



h) $[2\,;5] \subset [1\,;10]$

Car $1 \leq 2 \leq 5 \leq 10$, tous les éléments de $[2\,;5]$ (bleu) sont dans $[1\,;10]$ (vert).



i) $]-\infty\,;3] \subset \mathbb{R}$

Car tous les nombres réels inférieurs ou égaux à 3 (bleu) sont des nombres réels (vert = tout l'axe).