Ensembles de nombres et arithmétique - Solutions

2nd – mai 2026

Attention – Document généré par IA

Ce document a été essentiellement généré par une intelligence artificielle (LLM) et relu dans les grandes lignes. Des erreurs, des approximations ou des méthodes inhabituelles peuvent être présentes.

Restez critique face au contenu proposé et ne le considérez pas comme une vérité absolue.

Exercice 1 — Solution — Vocabulaire : multiples et diviseurs

On a $60 = 4 \times 15$, donc :

1. 4 est un **diviseur** de 60 (car $60 = 4 \times 15$, 4 est l'un des facteurs).
2. 60 est un **multiple** de 15 (car $60 = 15 \times 4$).
3. 15 **divise** 60 (car il existe un entier, 4, tel que $60 = 15 \times 4$).
4. 60 est **divisible par** 4 (car le reste de la division de 60 par 4 est 0).
5. 4 **divise** 60 (car il existe un entier, 15, tel que $60 = 4 \times 15$).
6. 15 est un **diviseur** de 60.

Les quatre mots expriment la même relation, mais depuis des points de vue différents : *diviseur* et *multiple* sont des noms, *divise* et *divisible par* sont des formulations verbales.

Exercice 2 — Solution — Critères de divisibilité

1. **270** : chiffre des unités $= 0$, donc divisible par 2, 5 et 10. Somme des chiffres $= 2 + 7 + 0 = 9$, divisible par 9 (et par 3). Deux derniers chiffres : 70, $70 \div 4 = 17{,}5$, non divisible par 4. Divisible par : **2, 3, 5, 9, 10**.
2. **1 348** : chiffre des unités $= 8$, donc divisible par 2. Somme des chiffres $= 1 + 3 + 4 + 8 = 16$, non divisible par 3 ni par 9. Chiffre des unités $\neq 0$ ni 5, non divisible par 5 ni 10. Deux derniers chiffres : 48, $48 \div 4 = 12$, divisible par 4. Divisible par : **2, 4**.
3. **4 185** : chiffre des unités $= 5$, donc divisible par 5. Non divisible par 2 (chiffre des unités impair). Somme des chiffres $= 4 + 1 + 8 + 5 = 18$, divisible par 9 (et par 3). Non divisible par 10 (unités $\neq 0$). Deux derniers chiffres : 85, $85 \div 4 = 21{,}25$, non divisible par 4. Divisible par : **3, 5, 9**.
4. **7 290** : chiffre des unités $= 0$, donc divisible par 2, 5 et 10. Somme des chiffres $= 7 + 2 + 9 + 0 = 18$, divisible par 9 (et par 3). Deux derniers chiffres : 90, $90 \div 4 = 22{,}5$, non divisible par 4. Divisible par : **2, 3, 5, 9, 10**.
5. **23 076** : chiffre des unités $= 6$, donc divisible par 2. Somme des chiffres $= 2 + 3 + 0 + 7 + 6 = 18$, divisible par 9 (et par 3). Non divisible par 5 ni 10. Deux derniers chiffres : 76, $76 \div 4 = 19$, divisible par 4. Divisible par : **2, 3, 4, 9**.
6. **50 004** : chiffre des unités $= 4$, donc divisible par 2. Somme des chiffres $= 5 + 0 + 0 + 0 + 4 = 9$, divisible par 9 (et par 3). Non divisible par 5 ni 10. Deux derniers chiffres : $04 = 4$, $4 \div 4 = 1$, divisible par 4. Divisible par : **2, 3, 4, 9**.

Exercice 3 — Solution — Parité

1.
   a. $38 = 2 \times 19$, donc 38 est **pair** (avec $k = 19$).
   b. $117 = 2 \times 58 + 1$, donc 117 est **impair** (avec $k = 58$).
   c. $204 = 2 \times 102$, donc 204 est **pair** (avec $k = 102$).
   d. $85 = 2 \times 42 + 1$, donc 85 est **impair** (avec $k = 42$).
2. Soient deux nombres impairs. On peut les écrire $2p + 1$ et $2q + 1$, où p et q sont des entiers.
   Leur somme vaut :
   $$(2p + 1) + (2q + 1) = 2p + 2q + 2 = 2(p + q + 1)$$
   On obtient un multiple de 2, donc la somme de deux nombres impairs est toujours **paire**.

Exercice 4 — Solution — Diviseurs et nombres premiers

1 On teste les diviseurs de 1 à $\sqrt{36} = 6$:

- $36 = 1 \times 36 \quad \Rightarrow$ 1 et 36 sont diviseurs.
- $36 = 2 \times 18 \quad \Rightarrow$ 2 et 18 sont diviseurs.
- $36 = 3 \times 12 \quad \Rightarrow$ 3 et 12 sont diviseurs.
- $36 = 4 \times 9 \quad \Rightarrow$ 4 et 9 sont diviseurs.
- $36 \div 5 = 7{,}2 \quad \Rightarrow$ 5 n'est pas diviseur.
- $36 = 6 \times 6 \quad \Rightarrow$ 6 est diviseur.

Les diviseurs de 36 sont : $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$.

2 36 possède 9 diviseurs, ce n'est pas exactement 2 diviseurs. Donc 36 **n'est pas premier**.

3 On élimine 1 (non premier par définition), puis on teste chaque entier :

- 2 : aucun diviseur entre 2 et $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ à tester. **Premier.**
- 3 : aucun diviseur entre 2 et $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ à tester. **Premier.**
- $4 = 2 \times 2$: divisible par 2. Non premier.
- 5 : non divisible par 2 ($\sqrt{5} \approx 2{,}2$). **Premier.**
- $6 = 2 \times 3$: divisible par 2. Non premier.
- 7 : non divisible par 2 ($\sqrt{7} \approx 2{,}6$). **Premier.**
- $8, 9, 10$: divisibles respectivement par 2, 3, 2. Non premiers.
- 11 : non divisible par 2 ni 3 ($\sqrt{11} \approx 3{,}3$). **Premier.**
- 12 : divisible par 2. Non premier.
- 13 : non divisible par 2 ni 3 ($\sqrt{13} \approx 3{,}6$). **Premier.**
- $14, 15, 16$: divisibles par 2, 3, 2. Non premiers.
- 17 : non divisible par 2, 3 ni 4 ($\sqrt{17} \approx 4{,}1$). **Premier.**
- 18 : divisible par 2. Non premier.
- 19 : non divisible par 2, 3 ni 4 ($\sqrt{19} \approx 4{,}4$). **Premier.**
- $20, 21, 22$: non premiers.
- 23 : non divisible par 2, 3, 4 ($\sqrt{23} \approx 4{,}8$). **Premier.**
- $24, 25, 26, 27, 28$: non premiers ($25 = 5^2$, les autres divisibles par 2 ou 3).
- 29 : non divisible par 2, 3, 4, 5 ($\sqrt{29} \approx 5{,}4$). **Premier.**
- $30 = 2 \times 15$: non premier.

Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 30 sont : **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29**.

Exercice 5 — Solution — Ranger des objets en rangées

1 S'il y a d livres par rangée et q rangées, alors le nombre total de livres est $d \times q = 72$. Pour qu'il n'en reste pas, d doit diviser 72 exactement : d est un diviseur de 72.

2 On teste les entiers de 1 à $\sqrt{72} \approx 8{,}5$:

- $72 = 1 \times 72$
- $72 = 2 \times 36$
- $72 = 3 \times 24$
- $72 = 4 \times 18$
- $72 \div 5 = 14{,}4$: 5 n'est pas diviseur.
- $72 = 6 \times 12$
- $72 \div 7 \approx 10{,}3$: 7 n'est pas diviseur.
- $72 = 8 \times 9$

Les diviseurs de 72 sont : $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$.

3 Le nombre de rangées doit être un diviseur de 72 compris entre 5 et 10. D'après la liste, ces diviseurs sont 6, 8 et 9.

- 6 rangées : $72 \div 6 = 12$ livres par rangée.
- 8 rangées : $72 \div 8 = 9$ livres par rangée.
- 9 rangées : $72 \div 9 = 8$ livres par rangée.

4 Parmi 6, 8 et 9 : $6 = 2 \times 3$ (non premier), $8 = 2^3$ (non premier), $9 = 3^2$ (non premier). Aucune des trois possibilités ne correspond à un nombre de rangées premier.

Exercice 6 — Solution — Conjecture de Goldbach

1 Rappel des nombres premiers inférieurs à 20 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

- $10 = 3 + 7 = 5 + 5$
- $12 = 5 + 7$
- $14 = 3 + 11 = 7 + 7$
- $16 = 3 + 13 = 5 + 11$
- $18 = 5 + 13 = 7 + 11$
- $20 = 3 + 17 = 7 + 13$

La conjecture est vérifiée pour tous ces nombres.

2 On cherche les paires de premiers $p \leq p'$ avec $p + p' = 100$. Comme 100 est pair et 2 est le seul premier pair, si $p = 2$ alors $p' = 98 = 2 \times 49$ qui n'est pas premier. On cherche donc deux premiers impairs. Nombres premiers à tester : 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

- $3 + 97$: 97 premier ⊠
- $11 + 89$: 89 premier ⊠
- $17 + 83$: 83 premier ⊠
- $29 + 71$: 71 premier ⊠
- $41 + 59$: 59 premier ⊠
- $47 + 53$: 53 premier ⊠

Exercice 7 — Solution — Dalles en mousse

1 Un rectangle de dimensions $a \times b$ (avec $a \leq b$) utilise exactement 60 dalles si et seulement si $a \times b = 60$, c'est-à-dire si a est un diviseur de 60 avec $a \leq \sqrt{60} \approx 7{,}7$.
Diviseurs de 60 inférieurs à 7 : 1, 2, 3, 4, 5, 6. Les dimensions possibles sont :

$$1 \times 60 \quad ; \quad 2 \times 30 \quad ; \quad 3 \times 20 \quad ; \quad 4 \times 15 \quad ; \quad 5 \times 12 \quad ; \quad 6 \times 10$$

2 Le périmètre d'un rectangle $a \times b$ est $\mathcal{P} = 2(a + b)$. Plus les dimensions sont déséquilibrées (l'une très petite, l'autre très grande), plus le périmètre est grand. Le périmètre maximal est donc pour 1×60 :

$$\mathcal{P} = 2(1 + 60) = 122 \text{ dalles}$$

Exercice 8 — Solution — Appartenance

1 $6{,}8 = \dfrac{68}{10} \in \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, donc $6{,}8 \in \mathbb{Q}$

2 $\dfrac{3}{5} \notin \mathbb{Z}$ car ce n'est pas un entier

3 $-7 \notin \mathbb{N}$ car négatif

4 $\sqrt{49} = 7 = \dfrac{7}{10^0} \in \mathbb{D}$

5 $\dfrac{6}{3} = 2 \in \mathbb{N}$

6 $-\dfrac{4}{56} = -\dfrac{1}{14} \in \mathbb{Q}$

7 $\pi \in \mathbb{R}$

8 $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ (irrationnel)

Exercice 9 — Solution — Plus petit ensemble d'appartenance

1 $-13 \in \mathbb{Z}$ car c'est un entier négatif, $-13 \notin \mathbb{N}$.

2 $\dfrac{-1}{4} = -0{,}25 = \dfrac{-25}{100} = \dfrac{-25}{10^2} \in \mathbb{D}$

3 $\sqrt{25} = 5 \in \mathbb{N}$

4 $\dfrac{27}{9} = 3 \in \mathbb{N}$

5 $\dfrac{5+3}{7} = \dfrac{8}{7} \in \mathbb{Q}$ (et $\dfrac{8}{7} \notin \mathbb{D}$ car 8 n'est pas divisible par 7, et son écriture décimale est infinie)

6 $0{,}125 = \dfrac{125}{10^3} \in \mathbb{D}$

7 $\sqrt{7} \in \mathbb{R}$ (irrationnel, 7 n'est pas un carré parfait)

8 $3{,}14 = \dfrac{314}{10^2} \in \mathbb{D}$

Exercice 10 — Solution — Montrer qu'un nombre est décimal

1 $-5 = \dfrac{-5}{10^0} \in \mathbb{D}$

2 $\dfrac{7}{2} = \dfrac{35}{10} = \dfrac{35}{10^1} \in \mathbb{D}$

3 $0{,}034 = \dfrac{34}{1000} = \dfrac{34}{10^3} \in \mathbb{D}$

4 $7\,584\,000 = \dfrac{7584000}{10^0} \in \mathbb{D}$

Exercice 11 — Solution — Vrai ou faux ?

1 **Vraie.** $x \in \mathbb{N}$ donc $2x \in \mathbb{N}$ et $2x + 1 \in \mathbb{N}$.

2 **Vraie.** $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ donc $2x + 1 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

3 **Fausse.** Contre-exemple : $x = 1 \Rightarrow 3 \times 1 - 7 = -4 \notin \mathbb{N}$. Le plus petit ensemble toujours valable est $\mathbb{Z}$.

4 **Fausse.** Contre-exemple : $x = 1 \Rightarrow \dfrac{1-6}{2} = -\dfrac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$. Le plus petit ensemble toujours valable est $\mathbb{D}$.

5 **Vraie.** Pour tout $x \in \mathbb{N}$, $x + 1 \in \mathbb{N}$ et $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ donc $\dfrac{x+1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$.

6 **Fausse.** Contre-exemple : $x = 2 \Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Le plus petit ensemble toujours valable est $\mathbb{R}$.

Exercice 12 — Solution — $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal – raisonnement par l'absurde

1 Si $\dfrac{1}{3} = \dfrac{a}{10^n}$, alors en multipliant les deux membres par 3×10^n on obtient $10^n = 3a$.

2 $10^k = (2 \times 5)^k = 2^k \times 5^k$. Les seuls facteurs premiers de 10^k sont 2 et 5. Or 3 est un nombre premier différent de 2 et 5, donc 10^k n'est jamais divisible par 3 : 10^k ne peut pas être un multiple de 3.

3 L'hypothèse « $\dfrac{1}{3}$ est décimal » conduit à une contradiction (il faudrait que 10^n soit un multiple de 3, ce qui est impossible).
Donc $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.