Dérivation et degré 3 - Plan de travail

Tstmg – novembre 2025

Savoir-faire de la séquence

- Calculer la dérivée d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à trois.
- Déterminer le sens de variation et les extremums d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

1 Étude de signe des polynômes de degré 2

- ☐ Exercice 1: Étude de signe d'un polynôme factorisé ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 2: Profit masqués ☆☆☆☆☆

2 Racine d'un polynome

- ☐ Exercice 3: Développer ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 4: Racines ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 5: Racines et factorisation ☆☆☆☆☆

3 Exercices types

- ☐ Exercice 6: Étude des variations d'un polynôme de degré 3 pas à pas ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 7: Mobilier urbain ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 8: Constructeur de Machins ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 9: Producteur de carottes ☆☆☆☆☆

Exercice 1 — Étude de signe d'un polynôme factorisé

Tracer le tableau de signe des polynômes suivants

1. $f(x) = 2x + 3$
2. $g(x) = 4(-x + 2)$
3. $h(x) = -3(4 - 5x)$
4. $i(x) = (2x - 1)(3x + 2)$
5. $j(x) = (5x + 3)(-2x - 6)$
6. $k(x) = (4x - 12)(-x + 1)$
7. $l(x) = 3(x + 2)(x - 5)$
8. $m(x) = -2(-x + 2)(-2x + 2)$
9. $n(x) = -0.1(6x-5)(0.2x+2)$

Exercice 2 — Profit masqués

Une usine produit chaque jour entre 0 et 60 milles masques. Une étude statistique a montré que les bénéfices pouvaient être modélisés par la fonction suivante:

$$f(x) = x^3 - 96x^2 + 2489,25x - 10\,171,25$$

1. Démontrer que $f(x) = (x - 5)(x - 39,5)(x - 51,5)$.
2. Étudier le signe de $f(x)$.
3. En déduire le nombre de masque que l'entreprise doit produire pour gagner de l'argent.

Exercice 3 — Racines

Les phrases suivantes sont-elles justes ou fausses? Justifier

1. La valeur $x = -1$ est une racine du polynôme $f(x) = 3x^2 - 2x - 3$.
2. La valeur $x = 3$ est une racine du polynôme $g(x) = 5(x - 3)(x + 1)$.
3. La valeur $x = 4$ est une racine du polynôme $h(x) = 2x^2 - 2x - 24$.
4. La valeur $x = -3$ est une racine du polynôme $h(x) = 2x^2 - 2x - 24$.
5. Les valeurs $x = -10$ et $x = 2$ sont deux racines du polynôme $i(x) = x^2 + 8x - 20$.
6. Les valeurs $x = -10$ et $x = 2$ sont deux racines du polynôme $j(x) = (x + 10)(x - 2)$.

Exercice 4 — Développer

Identifier les racines des polynômes suivants puis les développer.

1. $f(x) = (x+4)(x-2)$
2. $g(x) = (x-3)(x-8)$
3. $h(x) = 2(x-4)(x-8)$
4. $i(x) = -3(x-1)(x-6)$
5. $j(x) = 10(x-2)(x-5)$
6. $k(x) = 0.5(x+1)(x+9)$

Exercice 5 — Racines et factorisation

1. Soient 2 fonctions polynômes du 2nd degré

$$f(x) = 5x^2 - 26x + 5 \qquad g(x) = 2(x-5)(x-0.2)$$

   a. Démontrer que $x = 5$ et $x = 0.2$ sont 2 racines de f
   b. Démontrer que $x = 5$ et $x = 0.2$ sont 2 racines de g
   c. Est-ce que $f(x)$ et $g(x)$ sont égales?

2. Soit h une fonction polynôme du 2nd degré

$$h(x) = x^2 + 2x - 15$$

   a. À l'aide de la calculatrice, tracer la représentation graphique de h. Conjecturer (lire sur le graphique) les valeurs des 2 racines.
   b. Démontrer que les valeurs trouvées à la questions précédentes sont bien des racines de $h(x)$.
   c. Déterminer la forme factorisée de $h(x)$
   d. En déduire, sans utiliser le graphique, le tableau de signe de $h(x)$.

3. On veut factoriser puis étudier le signe de $f(x) = 3x^2 - 9x - 30$.
   a. Démontrer que 5 est une racine de f.
   b. Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont des racines de f.

$$-3 \qquad -2 \qquad 0 \qquad 2 \qquad 5$$

   c. Démontrer que $f(x)$ est égal à $3(x+2)(x-5)$.
   d. En déduire le tableau de signe de $f(x)$.

Exercice 6 — Étude des variations d'un polynôme de degré 3 pas à pas

On cherche à étudier les variations de la fonction suivante

$$f(x) = x^3 + 1,5x^2 - 6x + 1$$

1. Dériver la fonction $f(x)$ et démontrer que $f'(x) = 3(x-1)(x+2)$
2. Tracer la tableau de signe de $f'(x)$ puis en déduire les variations de $f(x)$.
3. La fonction admet-elle un minimum? Un maximum?

Exercice 7 — Mobilier urbain

On considère qu'une entreprise produit, par semaine, x lots de mobilier urbain, où x est un entier compris entre 0 et 80.

Le coût de production, exprimé en euro, pour x lots produits est modélisé par la fonction C définie par

$$C(x) = x^3 - 84x^2 + 5\,000x$$

1. Calculer le coût correspondant à la production de 50 lots.
2. Chaque lot produit par l'entreprise est vendu 5 000€. Justifier que le bénéfice, exprimé en euro, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend x lots est donné par la fonction B définie sur $[0\,;80]$ par

$$B(x) = -x^3 + 84x^2$$

3. a. Déterminer $B'(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de la fonction B.
   b. Montrer que pour tout réel de $[0\,;80]$,

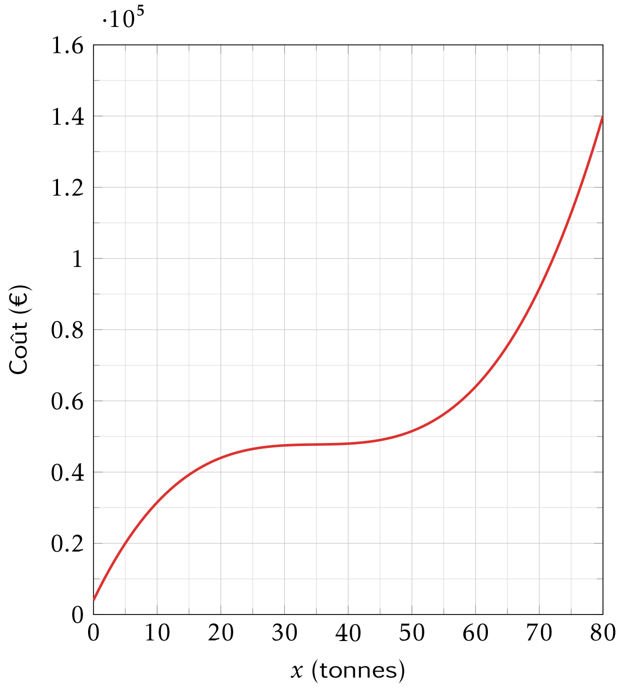
$$B'(x) = 3x(56-x)$$

   c. En déduire le nombre de lots que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser un bénéfice maximal, puis donner la valeur de ce bénéfice maximal.

Exercice 8 — Constructeur de Machins

Une entreprise fabrique des *machins*. Chaque jour, elle peut en produire entre 0 et 80 tonnes.

Le coût de fabrication, en euros, de x tonnes est modélisé par la fonction $C(x)$ représentée dans le graphique ci-dessous.



1 Lecture graphique: Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.

a. Combien coûte la production de 50 tonnes de *machins*.

b. Quelle quantité de *machins* peut-on produire pour une coût de fabrication de 100 000€?

2 Étude des recettes: Une tonne de *machins* est vendue 1 900. La recette pour x tonnes peut donc être modélisée par la fonction $R(x) = 1900x$.

a. Reproduire la représentation graphique de la fonction $R(x)$.

b. L'entreprise réalise-t-elle des bénéfices en produisant 10 tonnes?

c. Déterminer graphiquement les productions où ses bénéfices sont positifs.

3 Étude des bénéfices: On admet que les bénéfices peuvent être modélisés par la fonction $B(x) = -x^3 + 105x^2 - 1800x - 4000$ sur $[0\,;80]$.

a. Calculer $B'(x)$ la dérivée de $B(x)$.

b. Calculer $B'(10)$ et $B'(60)$

c. En déduire une forme factorisée de $B'(x)$.

d. Étudier le signe de $B'(x)$ et en déduire les variations de $B(x)$.

e. Compléter le tableau de variations de $B(x)$ avec les valeurs au bout des flèches.

f. Quelle quantité doit produire l'entreprise pour réaliser un bénéfice maximal. Que vaut ce bénéfice?

Exercice 9 — Producteur de carottes

Une entreprise produit et vend des carottes. Elle a la capacité de produire entre 0 et 16 tonnes.

Le coût de production, en euro, de x tonnes est modélisé par la fonction

$$C(x) = x^3 - 15x^2 + 78x - 650$$

Chaque tonne de carottes est vendue 150€.

1 Production de 3 tonnes de carottes

a. Déterminer le coût de production de 3 tonnes de carottes.

b. Déterminer les revenus de la vente de 3 tonnes.

c. En déduire les bénéfices. L'entreprise réalise-t-elle des bénéfices?

2 Étude des bénéfices

a. Déterminer l'expression des revenus $R(x)$ pour x tonnes de carottes vendues.

b. En déduire que les bénéfices peuvent être modélisés par la fonction

$$B(x) = -x^3 + 15x^2 + 72x + 650$$

c. Calculer $B'(x)$

d. Calculer $B'(-2)$ et $B'(12)$. En déduire une forme factorisée de $B'(x)$.

e. Étudier le signe de $B'(x)$ puis en déduire les variations de $B(x)$ pour x variant entre 0 et 16.

f. Quelles quantité de carottes doivent être vendues pour avoir un bénéfice maximal? Quel est alors ce bénéfice?