Logarithme - Plan de travail

Tstmg – février 2026

Savoir-faire de la séquence

- Utiliser le logarithme décimal pour résoudre une équation du type $a^x = b$ ou $x^a = b$ d'inconnue x réelle, une inéquation du type $a^x < b$ ou $x^a < b$ d'inconnue x réelle ou du type $a^n < b$ d'inconnue n entier naturel.
- Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal pour transformer des expressions numériques ou littérales

1 Motivation du Logarithme

- ☐ Exercice 1: Étude graphique ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 2: Économie d'échelle ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 3: Stockage de données ☆☆☆☆☆

2 Équation avec des puissances

- ☐ Exercice 4: Résolution d'équations ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 5: Résolution d'inéquations ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 6: Culture de bactéries ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 7: Relation fonctionnelle ☆☆☆☆☆

3 Manipulations algébriques

- ☐ Exercice 8: Manipulation d'expressions ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 9: Equation puissance ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 10: Propagation d'une rumeur ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 11: Dépréciation d'un smartphone ☆☆☆☆☆
- ☐ Exercice 12: Population de renards ☆☆☆☆☆

Légende: : pour découvrir quelque chose — : à faire en groupe — : pour s'entrainer

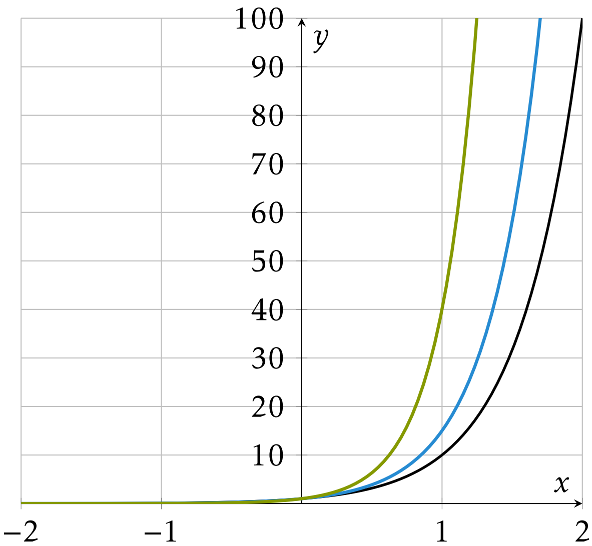
---

Exercice 1 — Étude graphique

1. On note $f(x) = 10^x$. Laquelle des fonctions tracées sur le graphique à droite correspond à la représentation graphique de $f(x)$.
2. Reconnaître les formules des autres fonctions puissances représentée sur le graphique.
3. Résoudre graphiquement les équations suivantes

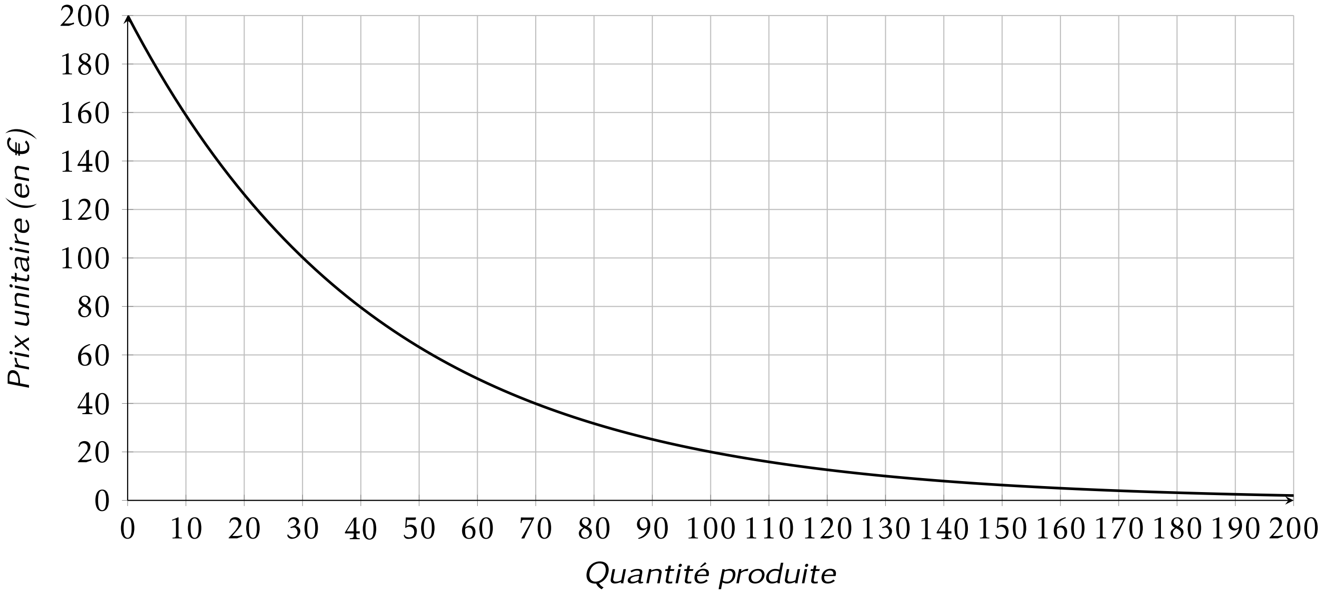
$$f(x) = 20 \qquad 10^x = 100 \qquad 10^x = 80$$

4. Résoudre graphiquement $f(x) \geq 50$.



Exercice 2 — Économie d'échelle

Une usine produit des pièces pour les voitures. Produire en grande quantité permet de réduire les coûts de production, c'est **une économie d'échelle**. On modélise le prix unitaire (pour produire une pièce) par la fonction $f(x) = 200 \times 10^{-0.01x}$ où x représente la quantité produite par l'usine en une journée. Cette fonction est représenter ci-dessous.



1 Vous utiliserez le graphique pour répondre aux questions suivantes

a. Quel est le coût unitaire pour une production de 10 pièces? Combien cela va-t-il coûter au total?

b. Combien de pièces doit-on produire pour que le coût unitaire soit environ égal à 100€?

c. Combien de pièces doit-on produire pour que le coût unitaire soit inférieur à 40€?

d. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 80$ puis interpreter le résultat.

2 Vous justifierez vos réponses aux questions suivantes avec un calcul

a. Quel est le coût unitaire pour une production de 20 pièces? Combien cela va-t-il coûter au total?

b. Quel est le coût unitaire pour une production de 170 pièces? Combien cela va-t-il coûter au total?

c. Combien de pièces doit-on produire pour que le coût unitaire soit inférieur à 10€?

Exercice 3 — Stockage de données

En informatique, un **bit** est représenté par un 1 ou un 0. C'est l'unité de base mesurer le poids d'une information numérique: 1bit peut décrire 2 choses, 2bits peut décrire 4 choses, 3bits 8 ... Si on note x le nombre de bits, alors le nombre d'information différentes qu'il est possible de décrire est donné par la fonction $f(x) = 2^x$.

1 Décrire la fonction $f(x)$. Quel type de fonction reconnaît-on?

2 Combien de d'informations peut-on décrire avec 8bits (c'est un octet)?

3 Combien de d'informations peut-on décrire avec 128bits?

4 Combien de bit doit-on utiliser pour décrire 1 000 000 informations différentes?

Exercice 4 — Résolution d'équations

Résoudre les équations suivantes

1 $10^x = 200$

2 $10^x = 2$

3 $10^x = -10$

4 $10^{2x} = 3$

5 $10^{-3x} = 10$

6 $10^{5x+1} = 10$

7 $2 \times 10^x = 6$

8 $-3 \times 10^x = -9$

Exercice 5 — Résolution d'inéquations

Résoudre les inéquations suivantes

1. $10^x \leq 300$
2. $10^x > 45$
3. $10^x < 100$
4. $10^{3x} \geq 3$
5. $10^{-0.1x} \leq 10$
6. $10^{2x+1} \geq 5$
7. $3 \times 10^x > 6$
8. $-2 \times 10^x < -8$

Exercice 6 — Culture de bactéries

Dans un laboratoire, on cultive des bactéries. Au début de l'expérience (jour 0), on compte 50 bactéries. Les conditions de culture permettent à la population de se multiplier par 10 chaque jour.

On modélise la population de bactéries par la suite (u_n) où n représente le nombre de jours écoulés depuis le début de l'expérience.

1. Calculer le nombre de bactéries au bout de 1 jour, puis au bout de 3 jours.
2. Quelle est la nature de la suite (u_n)? Justifier.
3. Exprimer (u_n) en fonction de n.
4. Calculer le nombre de bactéries au bout de 7 jours.
5. Le laboratoire dispose d'un milieu de culture pouvant accueillir au maximum 5 000 000 de bactéries. Déterminer précisément à partir de quel jour la capacité maximale sera dépassée.

Exercice 7 — Relation fonctionnelle

1. Relier les quantités égales entre elles

a. $A = \log(6)$
b. $B = \log(32)$
c. $C = \log(21)$
d. $D = \log(27)$
e. $E = \log(2) + \log(3)$
f. $F = \log(3) + \log(7)$
g. $G = \log(2) + \log(16)$
h. $H = \log(63) - \log(3)$
i. $I = \log(108) - \log(4)$
j. $J = 5\log(2)$
k. $K = 3\log(3)$
l. $L = -\log(\frac{1}{6})$

2. Réécrire ensembles les égalités trouvées
3. Conjecture des formules ci-dessous

$$\log(a) + \log(b) = \log(\dots) \qquad \log(a) - \log(b) = \log(\dots) \qquad n\log(a) = \log(\dots)$$

Exercice 8 — Manipulation d'expressions

Simplifier les calculs suivants pour ne garder qu'un seul logarithme.

1. $A = \log(2) + \log(3)$
2. $B = \log(9) - \log(3)$
3. $C = \log(2) + \log(0.5)$
4. $D = \log(2^3) + \log(2^4)$
5. $E = \log(4) + 3\log(2)$
6. $F = 5\log(2) - \log(16)$

Exercice 9 — Equation puissance

Résoudre les équations suivantes

1. $2^x = 50$
2. $3^x = 100$
3. $0.5^x = 0.1$
4. $0.8^x = 0.3$
5. $5 \times 1.5^x = 20$
6. $4 \times 5^{2x} = 80$

Exercice 10 — Propagation d'une rumeur

Une rumeur se propage dans un lycée de 1 500 élèves. Le premier jour, 3 élèves connaissent la rumeur. On observe que chaque jour, le nombre d'élèves qui connaissent la rumeur est multiplié par 4.

On modélise le nombre d'élèves informés au bout de n jours par la suite géométrique (u_n).

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. Interpréter ces résultats.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 \times 4^n$.
3. Calculer le nombre d'élèves informés au bout de 5 jours. Que remarque-t-on?
4. Déterminer le nombre de jours pour que tout le lycée soit au courant.

Exercice 11 — Dépréciation d'un smartphone

Un smartphone est acheté au prix de 800€. À cause de l'obsolescence et de l'usure, sa valeur diminue de 20% chaque année.

On modélise la valeur du smartphone après x années par la fonction $V(x) = 800 \times 0.8^x$ où x représente le nombre d'années écoulées depuis l'achat.

1. Calculer la valeur du smartphone après 1 an, puis après 3 ans. Arrondir à l'euro.
2. Calculer la valeur du smartphone après 2 ans et demi. Arrondir à l'euro.
3. Le propriétaire souhaite revendre son smartphone lorsque sa valeur sera descendue à 200€. Quel age aura le smartphone?

Exercice 12 — Population de renards

Dans un parc régional, on étudie une espèce de renards. Cette population était de 1 240 renards à la fin de l'année 2016. Les études ont montré que cette population diminue de 15% par an. Pour compenser cette diminution, le parc décide d'introduire chaque année 30 renards.
On modélise alors la population de renard par la suite (u_n) définie par la relation de récurrence suivante $u_{n+1} = 0.85u_n + 30$.

1. Calculer u_1 et u_2
2. Est-ce que la suite (u_n) est géométrique?

On suppose pour la suite que $u_n = 1040 \times 0.85^n + 200$

1. En tâtonnant, estimer la valeur de n pour que u_n passe en dessous de 1000.
2. En résolvant une inéquation, déterminer quand la population va atteindre 500 individus.