Fonction inverse - Plan de travail

Tstmg – avril 2026

1 Fonction inverse

2 Dérivations et étude des variations

3 Problèmes

Légende: : pour découvrir quelque chose — : à faire en groupe — : pour s'entrainer

---

Exercice 1 — Coût d'une entreprise

TP tableur

Exercice 2 — "factorisation"

Démontrer les égalités suivantes

1. $x+1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2+x+1}{x}$
2. $x+1+\dfrac{-1}{x^2}=\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2}$
3. $2x-5+\dfrac{5}{x^2}=\dfrac{2x^3-5x^2+5}{x^2}$
4. $\dfrac{3}{x}+2x+1=\dfrac{2x^2+x+3}{x}$
5. $1-\dfrac{121}{x^2}=\dfrac{(x-11)(x+11)}{x^2}$
6. $9-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{(3x-1)(3x+1)}{x^2}$

Exercice 3 — Dérivation de f

Soit $f(x)=x-6+\dfrac{4}{x}$ définie sur $]0\,;+\infty[$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Démontrer que $f'(x)=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f.

Exercice 4 — Dérivation de g

Soit $g(x)=2x+4+\dfrac{8}{x}$ définie sur $]0\,;+\infty[$.

1. Calculer $g'(x)$.
2. Démontrer que $g'(x)=\dfrac{2(x-2)(x+2)}{x^2}$.
3. Étudier le signe de $g'(x)$ puis dresser le tableau de variations de g.

Exercice 5 — Dérivation de h

Soit $h(x) = x + 2 + \frac{1}{x}$ définie sur $]0\,;+\infty[$.

1. Calculer $h'(x)$.
2. Démontrer que $h'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$.
3. Étudier le signe de $h'(x)$ puis dresser le tableau de variations de h.

Exercice 6 — Dérivation de i

Soit $i(x) = 3x + 40 + \frac{2700}{x}$ définie sur $]0\,;+\infty[$.

1. Calculer $i'(x)$.
2. Démontrer que $i'(x) = \frac{3(x-30)(x+30)}{x^2}$.
3. Étudier le signe de $i'(x)$ puis dresser le tableau de variations de i.

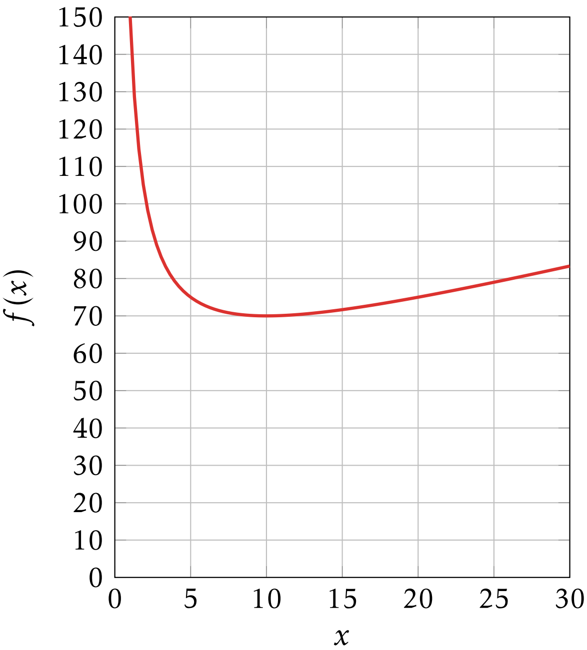
Exercice 7 — Histoire de coûts

Définition:

Le **coût moyen unitaire** quand on fabrique x unité est $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$ où $C(x)$ est le coût total pour produire x unités.

Une entreprise fabrique chaque jour entre 0 et $30m^3$ de produit chimique.

1. Soit C la fonction qui modélise ses coûts de fabrication. Elle est définie sur l'intervalle $[0\,;30]$ par $C(x) = x^2 + 50x + 100$ et exprimée en euros.
   a. Calculer le coût de production total pour $10m^3$.
   b. Calculer le coût moyen unitaire pour $10m^3$.
2. On définit la fonction f qui modélise le coût moyen unitaire en fonction de la quantité x par la fonction $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ sur l'intervalle $[1\,;30]$. On a représenté cette fonction ci-contre.
   a. Déterminer graphiquement une valeur approchée de $f(5)$ puis de $f(25)$.
   b. Déterminer graphiquement quelles quantité doivent être produite pour avoir un coût unitaire moyen inférieur à 80.



3. a. Démontrer que $f(x) = x + 50 + \frac{100}{x}$.
   b. Dériver la fonction f puis démontrer que l'on a

$$f'(x) = \frac{(x-10)(x+10)}{x^2}$$

   c. Étudier le signe de $f'(x)$ puis en déduire les variations de $f(x)$.
   d. Déterminer la quantité à produire pour que le coût moyen de production soit minimal.

Exercice 8 Coûts d'une entreprise

Un entreprise fabrique chaque semaine une quantité q, en tonnes, de produit chimique. Elle produit entre 10 et 100 tonnes chaque semaine. Le coût total de q tonnes produites est donné par la fonction définie sur l'intervalle $[10\,;100]$ par :

$$C(q) = 3q^2 + 40q + 2700$$

Partie A. Coût moyen unitaire

Le coût moyen unitaire est le coût moyen d'une tonne de produit lorsque q tonnes sont produites.

On appelle C_M la fonction représentant le coût moyen unitaire : $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$.

1. Démontrer que, pour tout réel q de l'intervalle $[10\,;100]$:

$$C_M(q) = 3q + 40 + \frac{2700}{q}$$

2. Calculer $C'_M(q)$.
3. Démontrer que, pour tout réel q de l'intervalle $[10\,;100]$:

$$C'_M(q) = \frac{3(q-30)(q+30)}{q^2}$$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction C_M sur l'intervalle $[10\,;100]$.
5. Quel est le coût moyen unitaire minimal ? Pour quelle quantité de produit chimique est-il atteint ?

Partie B. Coût marginal

Le coût marginal est le supplément de coût engendré par la production d'une tonne de produit supplémentaire.

On appelle C_m la fonction représentant le coût marginal : $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$.

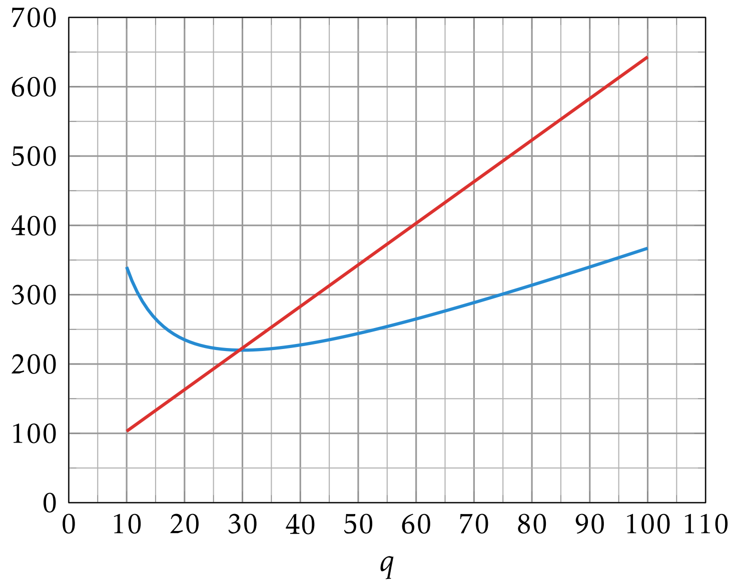
1. Calculer $C_m(20)$. Interpréter ce résultat avec les données de l'énoncé.
2. Démontrer que, pour tout réel q de l'intervalle $[10\,;100]$: $C_m(q) = 6q + 43$.
3. Déterminer $C'(q)$. Quelle est la différence entre $C_m(q)$ et $C'(q)$?

Partie C. Comparaison du coût marginal et du coût moyen

La courbe $\mathscr{C}$ représentant le coût moyen et la droite $\mathscr{D}$ représentant le coût marginal sont représentées sur le graphique ci-dessous :

Une règle économique affirme que le coût moyen unitaire est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal.

Cette règle s'applique-t-elle ici ?



Exercice 9 Bergamottes et craquelins

Pour financer une sortie scolaire, les élèves d'une classe Terminale d'un lycée lorrain veulent vendre des bergamottes et des craquelins. Par souci d'économie, ils décident de commander les bergamottes et les craquelins en vrac, puis de faire eux-mêmes les emballages.

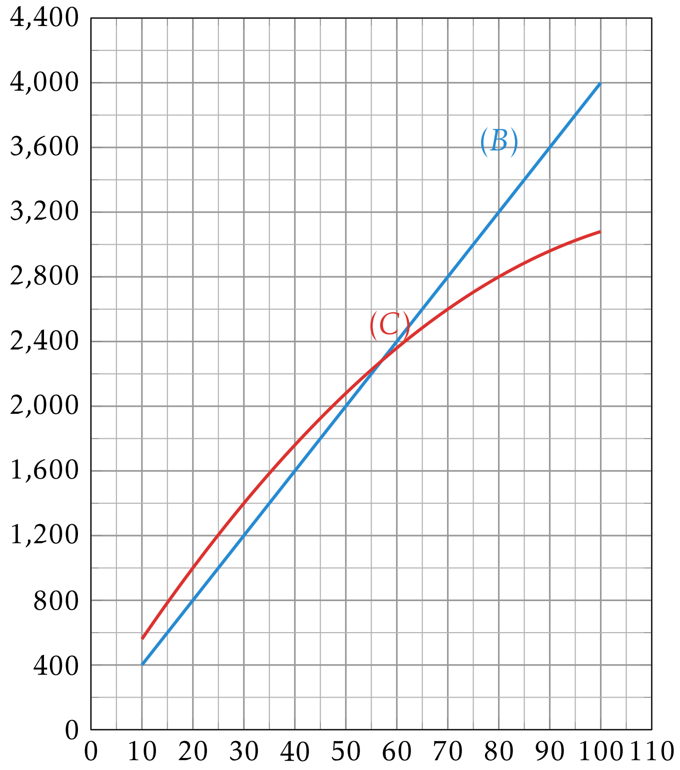
Partie A.

Les prix sont donnés par les deux courbes représentées ci-dessous.

La courbe (B) représente la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[10\,;100]$, qui donne le prix d'achat, en euros, de x kilogrammes de bergamottes.

La courbe (C) représente la fonction g, définie pour tout réel x de l'intervalle $[10\,;100]$, qui donne le prix d'achat, en euros, de x kilogrammes de craquelins.

On admettra que le prix des bergamottes est proportionnel à la quantité achetée.



1 a. Déterminer graphiquement le prix, en euros, de 40 kilogrammes de bergamottes. En déduire par le calcul le prix de 1 kilogramme de bergamottes.

b. En déduire l'expression de $f(x)$.

2 Soit g la fonction définie sur $[10\,;100]$ par : $g(x) = -0{,}2x^2 + 50x + 80$.

a. Déterminer graphiquement le prix, en euros, de 40 kilogrammes de craquelins.

b. Préciser cette valeur par un calcul.

Partie B.

On admet que le prix moyen, en euros, d'un kg de craquelins pour une commande de x kilogrammes de craquelins est donné par la fonction h, définie sur l'intervalle $[10\,;100]$ par :

$$h(x) = -0{,}2x + 50 + \frac{80}{x}$$

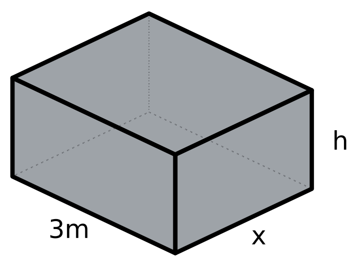
1 Pour tout $x \in [10\,;100]$, déterminer $h'(x)$ où h' est la fonction dérivée de la fonction h.

2 Établir le tableau de variations de h sur $[10\,;100]$. Que peut-on en conclure quant au prix par kilogramme de craquelins, en fonction de la quantité achetée ?

Exercice 10 Optimisation de matière première

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $12m^3$. La longueur est aussi fixée à $3m$ par le cahier des charges.

On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1 Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.

2 Démontrer que l'on doit avoir $h = \dfrac{4}{x}$.

3 On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire

$$S(x) = 6x + 8 + \frac{24}{x}$$

4 Démontrer que

$$S'(x) = \frac{6(x-2)(x+2)}{x^2}$$

5 En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.

6 Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.