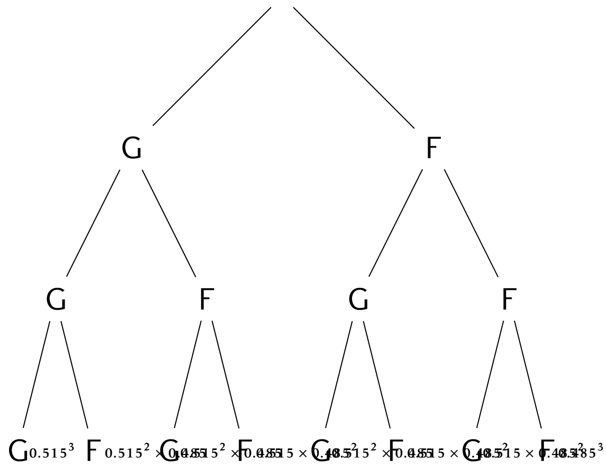
DS5 Solution

Tstmg – 13 janvier 2026

Exercice 1 — Solution — Natalité

1 Arbre de probabilité avec 3 familles:



2 X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ (nombre de familles) et $p = 0.515$ (probabilité d'avoir un garçon). On note $X \sim \mathcal{B}(3; 0.515)$. car on a 3 répétitions identiques et indépendantes d'une expérience à 2 issues.

3 Probabilité d'avoir exactement 2 garçons:

$$P(X = 2) = 3 \times 0.515^2 \times 0.485^1 = 3 \times 0.265225 \times 0.485 \approx 0.386$$

4 Calcul des probabilités:

- $P(X = 0) = 1 \times 0.515^0 \times 0.485^3 = 1 \times 1 \times 0.114 \approx 0.114$
  Interprétation: Il y a environ 11.4% de chance que les 3 familles aient une fille.
- $P(X = 1) = 3 \times 0.515^1 \times 0.485^2 = 3 \times 0.515 \times 0.235 \approx 0.363$
  Interprétation: Il y a environ 36.3% de chance qu'exactement une famille ait un garçon.
- $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) \approx 0.114 + 0.363 = 0.477$
  Interprétation: Il y a environ 47.7% de chance qu'au maximum une famille ait un garçon.

5 L'espérance de X est:

$$E(X) = n \times p = 3 \times 0.515 = 1.545 \text{ garçons}$$

En moyenne, sur les 3 familles sélectionnées, on attend environ 1.5 garçons.

Exercice 2 — Solution — Service de téléchargement

1 Calcul de $f(0)$:

$$f(0) = 43 \times 1.08^0 = 43 \times 1 = 43 \text{ millions d'abonnés}$$

Interprétation: Au 1er janvier 2015, le service comptait 43 millions d'abonnés.

2 Calcul de $f(1)$:

$$f(1) = 43 \times 1.08^1 = 43 \times 1.08 = 46.44 \text{ millions d'abonnés}$$

Taux d'évolution entre $f(0)$ et $f(1)$:

$$t = \frac{f(1) - f(0)}{f(0)} = \frac{46.44 - 43}{43} = \frac{3.44}{43} \approx 0.08 = 8\%$$

Le nombre d'abonnés a augmenté de 8% entre 2015 et 2016.

3 Nombre d'abonnés au 1er janvier 2020 (soit $t = 5$):

$$f(5) = 43 \times 1.08^5 \approx 43 \times 1.469 \approx 63.19 \text{ millions d'abonnés}$$

4 Nombre d'abonnés au milieu de l'année 2018 (soit $t = 3.5$):

$$f(3.5) = 43 \times 1.08^{3.5} \approx 43 \times 1.304 \approx 56.09 \text{ millions d'abonnés}$$

5 Nombre d'abonnés avant 2015:

- Au début de l'année 2014 ($t = -1$):

$$f(-1) = 43 \times 1.08^{-1} = \frac{43}{1.08} \approx 39.81 \text{ millions d'abonnés}$$

- Au début de l'année 2010 ($t = -5$):

$$f(-5) = 43 \times 1.08^{-5} = \frac{43}{1.08^5} \approx 29.27 \text{ millions d'abonnés}$$

6 Points à placer sur le graphique:

- $(-5; 29.27)$ - année 2010
- $(-1; 39.81)$ - année 2014
- $(0; 43)$ - année 2015
- $(1; 46.44)$ - année 2016
- $(3.5; 56.09)$ - milieu 2018
- $(5; 63.19)$ - année 2020

La courbe est une exponentielle croissante, qui part du bas à gauche et monte de plus en plus rapidement vers la droite.

Exercice 3 — Solution — Voitures

Partie A : Étude graphique

1 D'après le graphique, pour 55 voitures produites, on lit sur la courbe $\mathcal{C}_1$ un coût de production d'environ **400 milliers d'euros**.

2 Le chiffre d'affaires est représenté par la droite $\mathcal{C}_2$. Pour un chiffre d'affaires de 600 000 euros = 600 milliers d'euros, on cherche le point de la droite où $y = 600$.
Par lecture graphique, il faut produire et vendre environ **75 voitures**.

3 L'usine réalise un bénéfice quand le chiffre d'affaires est supérieur au coût de production, c'est-à-dire quand $\mathcal{C}_2 > \mathcal{C}_1$.
D'après le graphique, la droite $\mathcal{C}_2$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_1$ approximativement entre 30 et 95 voitures.
L'usine réalise un bénéfice pour un nombre de voitures dans l'intervalle **[30 ; 83]**.

Partie B : Étude d'une fonction

1 Calcul de $R'(x)$:
$R(x) = -0.001x^3 + 0.0705x^2 + 3.264x - 186$
En utilisant les formules de dérivation:

$$R'(x) = -0.001 \times 3x^2 + 0.0705 \times 2x + 3.264 = \boxed{-0.003x^2 + 0.141x + 3.264}$$

2 Vérifions que $x = 64$ est racine de $R'(x)$:

$$\begin{aligned} R'(64) &= -0.003 \times 64^2 + 0.141 \times 64 + 3.264 \\ &= -0.003 \times 4096 + 9.024 + 3.264 \\ &= -12.288 + 9.024 + 3.264 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $x = 64$ est bien une racine de $R'(x)$.
Vérifions que $x = -17$ est racine de $R'(x)$:

$$\begin{aligned} R'(-17) &= -0.003 \times (-17)^2 + 0.141 \times (-17) + 3.264 \\ &= -0.003 \times 289 - 2.397 + 3.264 \\ &= -0.867 - 2.397 + 3.264 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $x = -17$ est bien une racine de $R'(x)$.

3 $R'(x)$ est un trinôme du second degré avec $a = -0.003 < 0$.
Un tel trinôme est positif entre ses racines et négatif à l'extérieur.
Les racines sont $x_1 = -17$ et $x_2 = 64$.
Sur l'intervalle [0 ; 100]:

- $R'(x) > 0$ sur [0 ; 64] (car on est entre les deux racines)
- $R'(x) = 0$ pour $x = 64$
- $R'(x) < 0$ sur [64 ; 100] (car on est au-delà de la racine 64)

4 Tableau de variation de R sur [0 ; 100]:

x	0		64		100
Signe de $R'(x)$		+	0	−	
Variations de $R(x)$	$R(0)$	↗	$R(64)$	↘	$R(100)$

Avec: $R(0) = -186$, $R(64) \approx 126.69$ et $R(100) = -86$.

5 D'après le tableau de variation, la fonction R atteint son maximum en $x = 64$.
Il faut donc produire et vendre **64 voitures** pour que le résultat soit maximal.
Le résultat maximal est:

$$\begin{aligned} R(64) &= -0.001 \times 64^3 + 0.0705 \times 64^2 + 3.264 \times 64 - 186 \\ &\approx 49.52 \text{ milliers d'euros} \end{aligned}$$

Le bénéfice maximal est d'environ **249 520 euros** (ou 249.52 milliers d'euros).