DS8 Solution

Tstmg – 02 avril 2026

Exercice 1 — Solution — Automatismes – Logarithme

1 a. $A = 6\log 5 - \log 15 = \log(5^6) - \log(15) = \log\left(\dfrac{5^6}{15}\right) = \log\left(\dfrac{5^5}{3}\right)$

b. $B = 3\log 5 - 2\log 15 + \log 10 = \log(5^3) - \log(15^2) + \log(10) = \log\left(\dfrac{125 \times 10}{225}\right) = \log\left(\dfrac{50}{9}\right)$

2 On résout $5 \times 0{,}7^x \geq 15$, soit $0{,}7^x \geq 3$.
En passant au logarithme (base 10) :

$$x\log(0{,}7) \geq \log(3)$$

Comme $\log(0{,}7) < 0$, l'inégalité se renverse :

$$x \leq \frac{\log(3)}{\log(0{,}7)} \approx \frac{0{,}4771}{-0{,}1549} \approx -3{,}08$$

L'ensemble des solutions est $\left]-\infty\,;\,\dfrac{\log 3}{\log 0{,}7}\right] \approx \left]-\infty\,;\,-3{,}08\right]$.

Exercice 2 — Solution — Absentéismes

1 Les conditions d'une loi binomiale sont réunies :

- $n = 7$ répétitions identiques et indépendantes,
- à chaque répétition, deux issues : absent (succès, $p = 0{,}1$) ou présent,
- $p = 0{,}1$ constant.

Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(7\,;\,0{,}1)$.

2 a. Triangle de Pascal complété (coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$) :

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

b. $P(X = 3) = \binom{7}{3} \times 0{,}1^3 \times 0{,}9^4 = 35 \times 0{,}001 \times 0{,}6561 \approx 0{,}0230$

c.

$$P(X = 2) = \binom{7}{2} \times 0{,}1^2 \times 0{,}9^5 = 21 \times 0{,}01 \times 0{,}59049 \approx 0{,}1240$$

$$\begin{aligned} P(X < 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= 0{,}9^7 + 7 \times 0{,}1 \times 0{,}9^6 \\ &\approx 0{,}4783 + 0{,}3720 \approx 0{,}8503 \end{aligned}$$

3 Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,p)$, l'espérance est $E(X) = n \times p$.
$E(X) = 7 \times 0{,}1 = 0{,}7$
En moyenne, 0,7 employé sera absent par jour.

Exercice 3 — Solution — Chiffre d'affaires

1 $u_1 = 50000 \times 1{,}08 = 54\,000$ €

2 Chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par $1{,}08$, donc (u_n) est une suite **géométrique** de raison $q = 1{,}08$ et de premier terme $u_0 = 50\,000$.

3 $u_n = 50000 \times 1{,}08^n$

4 On cherche n tel que $u_n > 100\,000$:

$$\begin{aligned} 50000 \times 1{,}08^n &> 100000 \\ 1{,}08^n &> 2 \\ n \ln(1{,}08) &> \ln(2) \\ n &> \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}08)} \approx \frac{0{,}6931}{0{,}0770} \approx 9{,}006 \end{aligned}$$

Donc $n \geq 10$, soit à partir de l'année **2030**.
Vérification : $u_9 \approx 99\,950$ € $< 100\,000$ et $u_{10} \approx 107\,946$ € $> 100\,000$.

Exercice 4 — Solution — Taux d'évolution

1
a. $t_{\text{global}} = \dfrac{350-200}{200} = \dfrac{150}{200} = 0{,}75 = 75\,\%$
b. $(1+t)^5 = \dfrac{350}{200} = 1{,}75$ donc $1+t = 1{,}75^{1/5} \approx 1{,}1184$, soit $t \approx 11{,}84\,\%$.

2
a. Coefficient multiplicateur global :

$$CM = 1{,}05 \times 1{,}12 \times 0{,}97 \times 1{,}08 \approx 1{,}2320$$

Taux global : $t = 1{,}2320 - 1 = 0{,}2320 = 23{,}20\,\%$
b. $(1+t)^4 = 1{,}2320$ donc $1+t = 1{,}2320^{1/4} \approx 1{,}0535$, soit $t \approx 5{,}35\,\%$.

3 On calcule d'abord le taux d'évolution annuel pour chaque période :

$$\frac{88000-80000}{80000} = 10\,\% \qquad \frac{92400-88000}{88000} = 5\,\% \qquad \frac{87780-92400}{92400} \approx -5\,\% \qquad \frac{96558-87780}{87780} \approx 10\,\%$$

Le taux d'évolution annuel moyen sur 2021–2025 vérifie $(1+t)^4 = \dfrac{96558}{80000} \approx 1{,}2070$, soit :

$$1+t = 1{,}2070^{1/4} \approx 1{,}0482 \quad \text{donc} \quad t \approx 4{,}82\,\%$$

On compare chaque taux annuel au taux moyen $4{,}82\,\%$:

Période	2021–2022	2022–2023	2023–2024	2024–2025
Taux	$+10\,\%$	$+5\,\%$	$-5\,\%$	$+10\,\%$
Supérieur à $4{,}82\,\%$?	oui	oui	non	oui

La progression a été supérieure à la moyenne sur les périodes **2021–2022**, **2022–2023** et **2024–2025**.